بخش میان ترم

اندازه گیری: در تئوری خطا ها با مفاهیم اندازه گیری، مشاهدات، مجهولات آشنا شدیم، مفاهیمی که در نقشه برداری بسیار مهم و اساسی هستند، تمام کمیت هایی که اندازه گیری می کنیم حتما خطا هستند و با مقدار واقعی کمیت اختلاف دارند. ما هرگز دقیقا به مقدار واقعی یک کمیت دست پیدا نمی کنیم.

با پیشرفت تجهیزات و روش های محاسباتی همواره سعی داریم دقیق ترین و صحیح ترین مقدار را برای مشاهدات ارائه دهیم. در تکرار اندازه گیری ها ما به یک مقدار واحد و یکسان دست پیدا نمی کنیم و عامل آن می تواند هم انسانی و هم محیطی باشد.

مقدار واقعی = X

مشاهده(اندازه گیری) =x

برآورد از مقدار واقعی=$\hat{x}$

خطای اندازه گیری ε=x-X

برآوردی از خطای باقیمانده e= x-$\hat{x}$

در درس سرشکنی به بررسی روش هایی می پردازیم که به تعیین برآوردی از مقدار واقعی یعنی $\hat{x}$ می پردازند.

مروری بر مبحث خطاها: خطاهای اندازه گیری معمولا در سه دسته متداول که شامل خطاهای اتفاقی ، خطاهای سیستماتیک و خطای بزرگ بررسی می شوند. عامل خطاهای بزرگ انسانی است (یا همان اشتباه) مثلا نقشه بردار به سمت اشتباه قراولروی نماید. راه کشف اشتباهات به روش صحرایی ، مثلا کنترل شبکه و انجام مجدد مستقل مشاهدات و هم به روش محاسباتی ، مثلا کشف مقادیری از مشاهدات است که با میانگین خود اختلاف فاحشی دارند.

خطای سیستماتیک: خطایی است که از روی پدیده های قطعی اتفاق می افتد و به طور کلی به خطایی گفته می شود که بر اساس یک روند قطعی و شناخته شده اتفاق می افتد. بنابراین قابل پیش بینی و مدل سازی هستند. در کل فرآیند های قطعی به فرآیند هایی گفته می شود که با یک مدل ریاضی صریح قابل مدل سازی هستند. یعنی یک تابع ریاضی مشخص برای مدل سازی رفتار آن پدیده داریم ، همانند قانون هوک برای فنر ها و نیز همانند حرکت ماهواره (قانون سوم کپلر). خطاهای سیستماتیک بر همین اساس تعریف می شوند ، همانند انبساط یک متر فلزی ، تغییرات فشار هوا ، عدم کالیبره بودن دوربین لذا کنترل این روش ها هم به صورت صحرایی و هم به صورت محاسباتی می باشد. عملیات صحرایی همانند انجام مشاهدات در ساعات مختلف روز، در روش های محاسباتی خطاها با توابع ریاضی مدل شده و بر روی مشاهدات اعمال می شوند.

خطاهای اتفاقی: دقیقا در مقابل پدیده های قطعی پدیده هایی هستند که قابل پیش بینی و مدل سازی نیستند ، همانند انداختن یک تاس ، خطا های اتفاقی از همین جنس بوده لذا قابل پیش بینی و مدل سازی نیستند. برای کنترل این خطا ها از روش های آماری و محاسباتی استفاده می کنیم.

متغیر تصادفی: در آمار هر کمیتی با رفتار تصادفی را یک متغیر تصادفی می نامیم. برای توصیف متغیر های تصادفی از مفاهیم تئوری احتمالات استفاده می شود. خطاهای اتفاقی نیز متغیر های تصادفی شناخته می شوند. قبل از ورود به مباحث اصلی سرشکنی تعدادی از مفاهیم ساده مبانی احتمالات را بررسی می کنیم.

توزیع فراوانی: اگر یک طول را چندین بار مشاهده کرده باشیم و بعد از حذف تمامی خطاها و اشتباهات و سیستماتیک تعداد ۱۱۴ مشاهده از این مقادیر باقیمانده باشد.

مشاهده	فراوانی	فراوانی نسبی
12.02	5	0.04
12.03	10	0.09
12.04	17	0.15
12.05	32	0.28
12.06	21	0.18
12.07	16	0.14
12.08	9	0.08
12.09	4	0.04

فراوانی نسبی = (مشاهده هر فراوانی / مشاهدات کل تعداد)

در آمار و احتمال وقوع متغیری را بیشتر می دانیم که فراوانی نسبی بیشتری را داشته باشد.

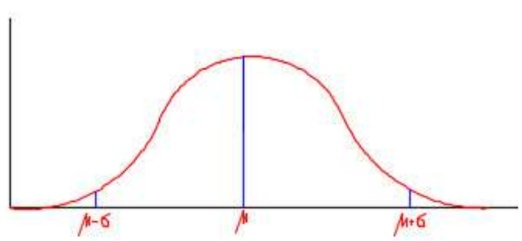
$$N(\mu.\sigma) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲ * \pi}} e^{(-\frac{(x-\mu)^{۲}}{۲*\sigma^{۲}})}$$

میانگین = μ و انحراف معیار = σ

تابع توزیع نرمال : در تمام مشاهدات نقشه برداری از یک تابع توزیع نرمال پیروی می کنند.

با فرض اینکه یک کمیت بینهایت بار مشـــاهده شـــود به جای نمودار و یا هیســـتوگرام توزیع فراوانی ، از نمودار تابع توزیع نرمال استفاده می کنیم. در آمار توابع توزیع احتمال متفاوتی وجود دارد. مثل تابع توزیع نرمال کای اسکوئر یا تابع توزیع فیشر . . .

از آنجا که به کرات ثابت شده است مشاهدات نقشه برداری از تابع توزیع نرمال پیروی می کند از این پس تمرکز ما بر روی شناخت تابع توزیع نرمال خواهد بود.



انحراف معیار: هر چقدر انحراف معیار کمتر باشد مشاهدات از نظر شباهت به یکدیگر نزدیک هستند ، هر چقدر مشاهدات دقیق تر باشند ، نشان دهنده انحراف معیار کمتر است.

$$N(\mu x.\sigma x^{۲}) = \frac{۱}{\sigma x\sqrt{۲ * \pi}} e^{(-\frac{(x-\mu x)^{۲}}{۲*\sigma x^{۲}})}$$

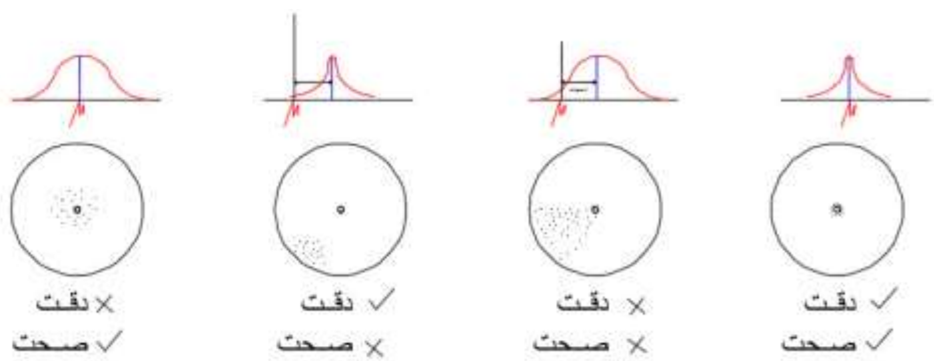
(میانگین = μ)(انحراف معیار = σ)(واریانس = σ^2)(عدد نپر = e)

با فرض وجود نداشتن هیچ اشتباه و خطای سیستماتیک در متغیر تصادفی، میانگین یا همان μ را به عنوان مقدار واقعی کمیت معرفی می کنیم. انحراف معیار (σ) نشان دهنده میزان پراکندگی در مشاهدات است. بنابراین اگر در مشاهدات تغییرات بیشتری داشته باشیم با پراکندگی بیشتری مواجه خواهیم بود. پس با انحراف معیار بزرگتری مواجه خواهیم بود و می توانیم نتیجه بگیریم که دقت کمتری داریم . . .

تعریف دقت : میزان نزدیکی یا انطباق اندازه گیری تکراری از یک کمیت واحد نسبت به یکدیگر را دقت می گوییم.

تعریف صحت : میزان نزدیکی یا انطباق مشاهدات یک کمیت واحد نسبت به مقدار واقعی آن کمیت صحت گفته می شود.

نکته: صحت همواره مجهول است. در عمل فقط می توانیم برآوردی از آن را ارائه کرده و یا با کنترل عوامل تاثیر گذار مثل اشتباهات و خطای سیستماتیک آن را کنترل نماییم.



ویژگی های تابع توزیع نرمال: احتمال وقوع مقدار کمیت مورد نظر بین دو عدد X_1 و X_2 برابر است با سطح زیر نمودار منحنی بین دو نقطه X_1 و X_2

- سطح زیر نمودار تابع توزیع نرمال برابر با ۱ است.
- ماکزیمم در نقطه میانگین یا همان μ اتفاق می افتد.
- منحنی نسبت به $X=\mu$ متقارن است.
- نقاط $\mu+\sigma$ و $\mu-\sigma$ نقاط عطف منحنی هستند.

امید ریاضی : اگر x متغیر تصادفی باشد تابع $g(x)$ دارای امید ریاضی است. یا می توان برای $g(x)$ امید ریاضی تعریف کرد.

$$E\, g(x) = \int_a^b g(x) \overbrace{f(x)}^{\text{تابع توزیع نرمال}} dx$$

ویژگیهای امید ریاضی: اگر x و y دو متغیر تصادفی باشند برای امید ریاضی موارد زیر را داریم:

- c=عدد ثابت E(Cx)= CE(x)
- E(x+y)=E(x)+E(y)
- E(xy)=E(x).E(y)+$E[(x-\mu x)(y-\mu y)]$
- E(c)=C

میانگین: با فرض $E(x^i)$ به عنوان ممان مقطع متغیر تصادفی، امید ریاضی مشابه زیر تعریف می شود.

ممان مرتبه اول یک متغیر تصادفی را میانگین آن متغیر تعریف می کنیم و برابر خواهد شد با:

$$g(x) = x^i \Rightarrow E(x') = \int x' f(x)dx$$

$$g(x) = x \Rightarrow E(x) = \int x \overbrace{f(x)}^{\text{تابع توزیع نرمال}} dx = \mu x$$

- c=عدد ثابت E(Cx)= CE(x)=c μx
- E(x+y)=E(x)+E(y)= $\mu x + \mu y$
- E(xy)=E(x).E(y)+$E[(x-\mu x)(y-\mu y)]$= $\mu y * \mu x$

با فرض $g(x) = (x-\mu x)^۲$ ممان مرکزی مرتبه i ام تعریف می شود.

ممان مرکزی مرتبه i ام= $E(x-\mu x)^۲ = \int (x-\mu x)^i f(x)dx$

ممان مرکزی مرتبه صفرم= $(x-\mu x)^۰ = ۱$

$E(۱) = ۱$

ممان مرکزی مرتبه یکم:

$(x-\mu x)^۱$

$$E(x-\ \mu x) = \overbrace{E(x)}^{\mu x} - \overbrace{E(\mu x)}^{\mu x} \Rightarrow\ \mu x - \mu x = ۰$$

ممان مرکزی مرتبه دوم:

$(x-\mu x)^۲$

$$E(x-\mu x)^۲ = E[x^۲ +\ \mu x^۲ - ۲ * x *\ \mu x] \Rightarrow\ E(x^۲) + \overbrace{E(\ \mu x^۲)}^{\mu x^۲} - ۲ * \mu x\, \overbrace{E(x)}^{\mu x}$$

$$E(x^۲) -\ \mu x^۲ - ۲ *\ \mu x^۲ = E(x^۲) -\ \mu x^۲ = \sigma x^۲$$

کواریانس:

$$cov(x.y) = E[(x-\mu x)(y-\mu y)] \Rightarrow E[(xy - x\mu y - y\mu x + \mu x\mu y]$$

$$E(xy) - \mu y E(x) - \mu x E(y) + E(\mu x\mu y)$$

$$E(xy) - \mu y\mu x - \mu x\mu y + \mu x\mu y$$

$$E(xy) - \mu y\mu x = \sigma xy$$

در اکثر پروژه های نقشه برداری با بیش از یک کمیت مواجه هستیم ، یعنی با چندین مشاهده سروکار داریم ، اگر بخواهیم ارتباط این مشاهدات مختلف با یکدیگر را بدست آوریم از مفهومی به نام کواریانس صحبت می کنیم.

کواریانس دو مشاهده x وy برابر است با :

$$\rho xy = \frac{\sigma xy}{\sigma x\sigma y}\begin{cases} = ۰ & \text{استقلال کامل} \\ = \pm ۱ & \text{وابسته کامل} \\ = -۱ < \rho < ۱ & \text{همبسته هستند} \end{cases}$$

ضریب همبستگی: از آنجا که کواریانس قابلیت مقایسه عددی ندارد ، به این معنی که کواریانس بیشتر از نظر عددی نشان دهنده همبستگی و یا وابستگی بیشتر نمی تواند باشد، مفهوم ضریب همبستگی تعریف می شود که مقداری بین ۱- تا ۱ می باشد.

ماتریس وزن: کاربرد ماتریس وریانس کوریانس در محاسبات ، وزن دهی به مشاهدات می باشد. به این صورت که ماتریس وزن عکس ماتریس وریانس کوریانس انتخاب می شود. هر مشاهده ای که وریانس کوچکتر داشته باشد در نتیجه دقت بالاتری دارد ، لذا در محاسبات دارای سهم بیشتری خواهد بود و این امر به این علت صورت می پذیرد که ما می خواهیم در تعیین مجهولات ، مشاهدات دقیق تر ، موثر تر از سایر مشاهدات باشند.

ضرایب و نماد های ماتریس وزن:

بردار مجهولات← $x = \begin{bmatrix} x_۱ \\ \dots \\ x_u \end{bmatrix}$ → برداری x

بردار مشاهدات← $l = \begin{bmatrix} l_۱ \\ \dots \\ l_n \end{bmatrix}$ → بردار l

بردار میانگین ← $\mu = \begin{bmatrix} \mu_۱ \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ → بردار μ

$$Q=E[(l-\mu)(l_۱-\mu)^T]=\begin{bmatrix} \sigma_۱ & \sigma_{۱۲} & \sigma_{۱۳} \cdots & \sigma_n \\ \sigma_{۲۱} & \sigma_{۲۱}{}^۲ & \sigma_{۲۳} \dots & \sigma_{۲*n} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} \cdots & \sigma_n{}^۲ \end{bmatrix}$$

در ماتریس بالا قطر اصلی وریانس بوده و بالای قطر اصلی کوریانس می باشد.

هر چقدر دقت بیشتر باشد واریانس کوچکتر خواهد بود

مراحل انجام یک پروژه نقشه برداری:

- شناسایی مجهولات و دقت مورد نیاز آنها
- تعیین مدل ریاضی (مدل ریاضی تابعی است که ارتباط بین مشاهدات و مجهولات را برقرار می کند).

مجهولات : کمیت هایی هستند که به طور مستقیم قابل اندازه گیری نیستند.

مشاهدات: کمیت هایی هستند که به طور مستقیم قابل اندازه گیری هستند.

- پردازش اولیه (در این مرحله تعیین می کنیم که برای دست یابی به مجهولات و دقت تعیین شده در مرحله شناسایی مجهولات و دقت مورد نیاز آنها می بایست مشاهدات به چه صورت ،یعنی به چه روش و دستگاهی و چه دقتی برداشت شوند تا بتوانیم به هدف نهایی برسیم) در عمل می وان گفت در این مرحله دستورالعمل مشاهداتی تعیین می شود.
- انجام مشاهدات
- کنترل مشاهدات توسط آزمون های پیش از سرشکنی، مثلا کنترل این موضوع که مشاهدات دارای خطای سیستماتیک و یا اشتباه نباشند.
- انجام محاسبات سرشکنی و تشکیل مدل سرشکنی ، یعنی قرار دادن مشاهدات و دقت آنها در تابع ریاضی و دست یابی به مجهولات
- پردازش های پس از سرشکنی (تعیین قابل قبول بودن و یا نبودن نتایج به وسیله آزمون های آماری)
- ارائه نتایج

مفاهیم ماتریس (مقدمه ریاضی):

۱- رتبه یا رنک یک ماتریس : برابر است با بعد بزرگترین زیر ماتریس از آن ماتریس که دترمینانش مخالف صفر باشد و به عبارتی معکوس پذیر باشد و یا مقدار سطر و ستون های مستقل یک ماتریس

۲- مستقل بودن : تعداد سطر و ستون هایی که نتوانیم بر حسب یکدیگر بنویسیم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to determinan = \frac{۱}{|ad-bc|} \neq ۰$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۹ \\ -۲ & -۳ & ۱ \\ ۴ & ۶ & -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow rank = ۲ \Leftrightarrow \text{سطر سوم} = \text{سطر دوم} * (-۲) \Rightarrow r(A) = ۲$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{\det(a)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{(\mathrm{ad-bc})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

قضیه:

$۱\to \ A_{m*n} \Rightarrow r(A) \leq Min\{m.n\}$

$۲\to \ A = B*C \Rightarrow r(A) \leq Min\{r(A).r(C)\}$

$۳ \to A = B + C \Rightarrow r(A) \leq \{r(B).r(C)\}$

$٤ \to A_{m*m} \Rightarrow r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^TA)$

- اگر $r(A_{m*n}) = Min\{m.n\}$ لذا A را مرتبه کامل گویند.
- اگر $r(A) = m$ باشد ، A را مرتبه کامل سطری گویند.
- اگر $r(A) = m$ باشد ، A را مرتبه کامل ستونی گویند.

وارون های یک ماتریس :

$۱\to A_{m*m} \to r(A) = m \Rightarrow AA^{-۱} = A^TA = I_{m*m}$

A مرتبه کامل است و وارون پذیر می باشد

$۲\longrightarrow A_{m*n} \to r(A) = m \Longrightarrow AA^{-۱} = I$

A مرتبه کامل سطری است و دارای وارون راست است و حتما در راست ضرب می شود

$۳\longrightarrow A_{m*n} \to r(A) = n \Longrightarrow r(A) = n \Longrightarrow A^{-۱}lA = I$

A مرتبه کامل ستونی است و دارای وارون چپ است و حتما در چپ ضرب می شود.

$۴\longrightarrow A_{m*m} \to r(A) \neq m*n$

A وارون پذیر نیست ولی دارای شبه وارون است.

ویژگی های شبه وارون $(A^T A)$:

یک ماتریس شبه وارون می بایست چهار ویژگی زیر را داشته باشد.

الف) $A * A^T A = A$

ب) $A^T * AA^T = A^T$

ج) $(AA^T)^T = AA^T$

د) $(A^T A)^T = A^T A$

معرفی یک ماتریس خاص:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$$

ماتریس های معین مثبت: در فضای اعداد حقیقی ماتریس *A=n*n* را مثبت گویند هرگاه:

- A معین مثبت است هر گاه همه ی مقادیر ویژه آن بزرگتر از صفر باشد. $x^T Ax > 0$
- A نیمه معین مثبت است هر گاه همه ی مقادیر ویژه آن هم صفر و هم بزرگتر از صفر باشد. $x^T Ax \geq 0$
- A معین منفی است هر گاه همه ی مقادیر ویژه آن منفی باشد. $x^T Ax < 0$
- A نیمه معین منفی است هر گاه همه ی مقادیر ویژه آن نا مثبت هستند. $x^T Ax \leq 0$

مشتق های ماتریسی:

مشتق بردار نسبت به اسکالر:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} (\text{بردار}) \quad and \quad u \ (\text{اسکالر}) \quad \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u} \end{bmatrix}$$

مشتق اسکالر نسبت به بردار:

$$f = (x_1 . x_2 . \dots . x_n) \ (\text{اسکالر}) \quad and \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} (\text{بردار}) \quad \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} . \dots . & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

مشتق بردار نسبت به بردار:

$$x_n = \begin{bmatrix} x_۱ \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} (\text{بردار}) \quad and \quad y_u = \begin{bmatrix} y_۱ \\ \cdots \\ y_u \end{bmatrix} (\text{بردار}) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial y_۱}{\partial x_۱} & \frac{\partial y_۱}{\partial x_۲} & \cdots & \frac{\partial y_۱}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_۲}{\partial x_۱} & \frac{\partial y_۲}{\partial x_۲} & \cdots & \frac{\partial y_۲}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_u}{\partial x_۱} & \frac{\partial y_u}{\partial x_۲} & \cdots & \frac{\partial y_u}{\partial x_n} \end{bmatrix}}^{u*n}$$

مشتق ماتریس نسبت به اسکالر:

$$A_{m*n} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱.n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} (\text{ماتریس}) \quad and \quad u\,(\text{اسکالر}) \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial u} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial a_{۱۱}}{\partial u} & \cdots & \frac{\partial a_{۱.n}}{\partial u} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial u} & \cdots & \frac{\partial a_{mn}}{\partial u} \end{bmatrix}}^{m*n}$$

مشتق اسکالر نسبت به ماتریس:

$$u\,(\text{اسکالر}) \quad and \quad A_{m*n} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱.n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} (\text{ماتریس}) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial A} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_{۱۱}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{۱.n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial a_{m1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{mn}} \end{bmatrix}}^{m*n}$$

انواع مدل سرشکنی:

شامل: مدل پارامتریک – مدل شرط – مدل ترکیبی

مدل پارامتریک: اگر به ازای هر مشاهده بتوانیم یک معادله بنویسیم به مدل پارامتریک دست پیدا می کنیم.

مثال تراز یابی:

$$\text{(معادلات)}\quad \begin{cases}\Delta h_{۱.۲} = h_۲ - h_۱ \\ \Delta h_{۲.۳} = h_۳ - h_۲ \\ \Delta h_{۳.۴} = h_۳ - h_۴\end{cases} \qquad x = \begin{bmatrix} h_۲ \\ h_۳ \\ h_۴ \end{bmatrix}\left(\text{مجهولات}\right) \qquad l = \begin{bmatrix}\Delta h_{۱.۲} \\ \Delta h_{۲.۳} \\ \Delta h_{۳.۴}\end{bmatrix}\left(\text{مشاهدات}\right)$$

نکته: ماتریس ضرایب، مجهولات را به مشاهدات مرتبط می کند.

نکته: ماتریس ضرایب مشتق معادلات نسبت به مجهولات است.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_۲ \\ h_۳ \\ h_۴ \end{bmatrix}$$

درجه آزادی (df) :

$$df = \overbrace{n}^{\text{تعداد مشاهدات}} - \overbrace{u}^{\text{تعداد مجهولات}}$$

نکته: در صورتی با مدل پارامتریک معادله حل می شود که $n > u$ باشد و نیز $r(A) = u$ باشد.

به طور کلی در مدل پارامتریک:

$$\begin{cases} df > ۰ \\ n > u \\ r(A) = u \end{cases}$$

حل مدل پارامتریک: برای حل دستگاه معادلات پارامتریک می بایست یک دستگاه مقید حل کنیم و روش پیشنهادی روش لاگرانژی است که Q تعریف می شود و سپس شروع به حل می کنیم.

مینیمم کردن تابع هدف Q این اطمینان را به ما می دهد که مجهول به دست آمده هم در معادله $f(x)$ و هم در شرط $g(x)$ صدق نماید. در مدل پارامتریک این بدان معنی است که مجهولات به دست آمده برای ما ، یعنی x بهترین برآورد از مجهولات پروژه بوده و باقیمانده یعنی e کمترین خطای اتفاقی می باشد.

$$\begin{cases} f(x) = ۰ \\ g(x) \longrightarrow min \end{cases} \qquad \begin{cases} l = Ax - e \Rightarrow l - Ax + e = ۰ \\ e^T we \longrightarrow min \end{cases}\text{دستگاه معادله مقید}$$

$$Q: q(x) - ۲ * \lambda^T f(x) \qquad \rightarrow min \qquad \text{تابع هدف لاگرانژ}$$

ضریب لاگرانژ λ $\quad Q = e^T\omega e - ۲ * \lambda^T(l + e - Ax) \rightarrow min$

نکته: برای بدست آوردن min یک تابع ابتدا از آن مشتق گرفته و سپس برابر صفر قرار می دهیم.

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial e} = e^T\omega + e^T\omega^T - ۲ * \lambda^T - ۲ * e^T\omega - ۲ * \lambda^T = ۰$$

$$\omega = \omega^T \Rightarrow e^T\omega - \lambda^T = ۰ \qquad \Rightarrow \lambda^T = e^T\omega \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\lambda = \omega e}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -۲ * \lambda^T A = ۰ \qquad \Rightarrow \lambda^T A = ۰$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -۲(l + e - Ax) = ۰ \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{(l + e - Ax) = ۰}$$

$$\omega e = \lambda * (\omega^{-۱}) \qquad \Rightarrow \qquad e = \omega^{-۱}\lambda$$

$$\begin{cases} e = \omega^{-۱}\lambda \rightarrow \mathrm{I} \\ (l + e - Ax) = ۰ \rightarrow \mathrm{II} \end{cases}$$

$$\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{II} \Rightarrow \qquad l + \omega^{-۱}\lambda - Ax = ۰ \quad \Rightarrow \quad \omega^{-۱}\lambda = Ax + l \quad \overset{*\omega}{\rightleftarrows}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = \omega Ax - \omega l \rightarrow \mathrm{III}$$

$\mathrm{I} \rightarrow$
III and $\lambda^T A = ۰ \rightarrow * T \quad \Rightarrow \quad A^T \; l = ۰$

$$\Longrightarrow (A^T\omega A)x = A^T\omega l \qquad \rightarrow * (A^T\omega A)^{-۱}$$

بهترین جواب ممکن $\widehat{x} = (A^T\omega A)^{-۱}A^T\omega l$

در مدل پارامتریک به تعداد مشاهدات می باست معادله بنویسیم.

ماتریس وزن ، نماینده میزان دقت روی مشاهدات است.

ماتریس وزن معکوس ماتریس وریانس کوریانس می باشد.

ماتریس وریانس کوریانس مشاهدات ماتریسی است که عناصر قطر اصلی آن وریانس مشاهدات و عناصر قطر فرعی کواریانس مشاهدات می باشند. هر چقدر وریانس از نظر عددی کوچکتر باشد مشاهدات با دقت بالاتری انجام شده است.

$\widehat{x} = (A^T \omega A)^{-۱} A^T \omega l \ \rightarrow$ مجهولات

$l + e = Ax \ \Longrightarrow e = A\hat{x} - l \Longrightarrow \hat{e} = (A(A^T \omega A)^{-۱} A^T \omega l) - l$

$\hat{e} = (A(A^T \omega A)^{-۱} A^T \omega l))l \longrightarrow$ بردار باقیمانده

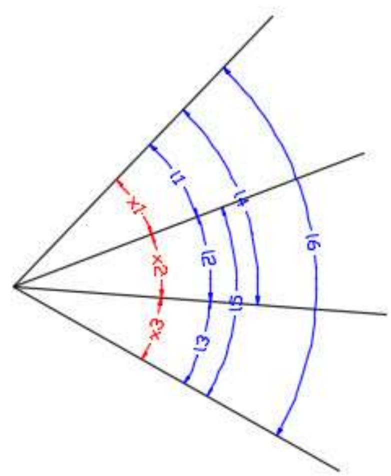
می توانیم مشاهدات سر شکنی شده را بدست بیاوریم:

$\hat{l} = l + \hat{e} \Longrightarrow (A(A^T \omega A)^{-۱} A^T \omega l) - l + l$

$\hat{e} = (A(A^T \omega A)^{-۱} A^T \omega l) = Ax$

بخش پایان ترم

مثال: برای محا سبه زوایای ($x1.x2.x3$) م شاهدات $l6$ تا $l1$ انجام شده ا ست. مطلوب ا ست ت شکیل مدل پارامتریک و تعیین درجه آزادی:



گام اول: تشکیل بردار مجهولات: $\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$

گام دوم: تشکیل بردار مشاهدات: $\begin{bmatrix} l_۱ \\ l_۲ \\ l_۳ \\ l_۴ \\ l_۵ \\ l_۶ \end{bmatrix}$

گام سوم: تعیین درجه آزادی $df = n - u \Longrightarrow df = ۶ - ۳ \Longrightarrow df = ۳$

گام چهارم: نوشتن معادلات(۶ معادله برای ۶ مشاهده)

$l1 = x1$

$l2 = x2$

$l3 = x3$

$l4 = x1 + x2$

$l5 = x2 + x3$

$l6 = x1 + x2 + x3$

گام پنجم: تشکیل ماتریس ضرایب A ، که در این مثال یک ماتریس ۳*۶ خواهد بود.

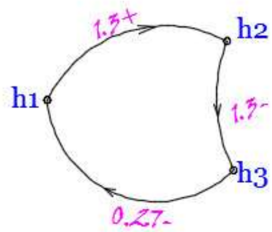
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial x_1}=1 & \frac{\partial l_1}{\partial x_2}=0 & \frac{\partial l_1}{\partial x_3}=0 \\ \frac{\partial l_2}{\partial x_1}=0 & \frac{\partial l_2}{\partial x_2}=1 & \frac{\partial l_2}{\partial x_3}=0 \\ \frac{\partial l_3}{\partial x_1}=0 & \frac{\partial l_3}{\partial x_2}=0 & \frac{\partial l_3}{\partial x_3}=1 \\ \frac{\partial l_4}{\partial x_1}=1 & \frac{\partial l_4}{\partial x_2}=1 & \frac{\partial l_4}{\partial x_3}=0 \\ \frac{\partial l_5}{\partial x_1}=0 & \frac{\partial l_5}{\partial x_2}=1 & \frac{\partial l_5}{\partial x_3}=1 \\ \frac{\partial l_6}{\partial x_1}=1 & \frac{\partial l_6}{\partial x_2}=1 & \frac{\partial l_6}{\partial x_3}=1 \end{bmatrix}$$

ماتریس وزن را با ω نمایش می دهند. هر گاه انحرف معیار σ تعریف شود ، در محاسبات دخالت داده خواهد شد و در غیر این صورت آن را با ماتریس یکه نمایش می دهیم و در محاسبات تاثیری نخواهد داشت.

$$\hat{x} = (A^T \omega A)^{-1} A^T \omega l \Longrightarrow \omega = I$$

$$\Longrightarrow \hat{x} = \underbrace{(\overbrace{\overbrace{A^T}^{u*n}\ \overbrace{A}^{n*u}}^{u*u})^{-1}\ \overbrace{\overbrace{A^T}^{u*n}\ \overbrace{l}^{n*1}}^{u*1}}_{u*1}$$

مثال: ترازیابی مطابق شکل انجام شده است. مطلوب است مختصات سرشکنس شده نقاط ۲ و ۳ چنانچه h1=100 باشد.



گام اول: تشکیل بردار مجهولات: $\begin{bmatrix} h2 \\ h3 \end{bmatrix}_{۲*۱}$

گام دوم تشکیل بردار مشاهدات: $\begin{bmatrix} \Delta h12 \\ \Delta h23 \\ \Delta h23 \end{bmatrix}$

گام سوم: تعیین درجه آزادی $df = n - u \Longrightarrow df = ۳ - ۲ \Longrightarrow df = ۱$

گام چهارم: نوشتن معادلات(۳ معادله برای ۳ مشاهده)

$$\Delta h12 = h2 - h1 \Longrightarrow \Delta h12 + h1 = h2 \Longrightarrow \quad \Delta h12 + h1 = ۱۰۱.۳۰$$

$$\Delta h23 = h3 - h2 \Longrightarrow \quad h3 - h2 = -۱$$

$$\Delta h31 = h1 - h3 \Longrightarrow \Delta h31 - h1 = -h3 \Longrightarrow \Delta h31 - h1 = -۱۰۰.۲۷$$

تشکیل ماتریس ضرایب A ، که در این مثال یک ماتریس ۲*۳ خواهد بود.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۳*۲} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}_{۲*۳}$$

$$\text{ماتریس مشاهدات} \, l = \begin{bmatrix} ۱۰۱.۳۰ \\ -۱ \\ -۱۰۰.۲۷ \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = (A^T \omega^{-۱} A)^{-۱} A^T \omega^{-۱} l \Longrightarrow \omega = \mathrm{I}$$

$$\left(\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \right)^{-۱} * \left(\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ۱۰۱.۳۰ \\ -۱ \\ -۱۰۰.۲۷ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ۱۰۱.۲۹ \\ ۱۰۱.۲۸ \end{bmatrix}$$

مثال ۳: زاویه α با سه دستگاه مختلف مطابق جدول اندازه گیری شده است. بهترین مقدار آن را برآورد نمایید.

$$\alpha\begin{cases}۴۵^\circ ۲۷' ۲۰''\\ ۴۵^\circ ۲۷' ۲۴''\\ ۴۵^\circ ۲۷' ۲۳''\end{cases}\quad \sigma\begin{cases}۶''\\ ۹''\\ ۳''\end{cases}$$

گام اول: تشکیل بردار مجهولات $[\alpha]$ یک مجهول داریم.

گام دوم: تشکیل بردار مشاهدات $l=\begin{bmatrix}\alpha_۱\\ \alpha_۲\\ \alpha_۳\end{bmatrix}$

گام سوم: تعیین درجه آزادی $df = n - u \Longrightarrow df = ۳ - ۱ \Longrightarrow df = ۲$

با توجه به اینکه سه مشاهده داریم می بایست سه معادله بنویسیم

گام چهارم: تعریف معادلات

$$\alpha_۱ = \alpha$$

$$\alpha_۲ = \alpha$$

$$\alpha_۳ = \alpha$$

گام پنجم: تعریف ماتریس ضرایب. از معادلات نسبت به مجهولات مشتق می گیریم

$$A = \begin{bmatrix}۱\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix} \Longrightarrow A^T = [۱ \quad ۱ \quad ۱]$$

گام ششم: تعریف ماتریس ω

$$\begin{bmatrix}\sigma^۲ = ۳۶ & ۰ & ۰\\ ۰ & \sigma^۲ = ۸۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & \sigma^۲ = ۹\end{bmatrix}$$

گام ششم: تعریف رابطه

$$\hat{x} = (\,A^T\omega^{-۱}A)^{-۱}A^T\omega^{-۱}l$$

$$\hat{x} = \left([۱ \quad ۱ \quad ۱] * \begin{bmatrix}۳۶ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۸۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۹\end{bmatrix}^{-۱} * \begin{bmatrix}۱\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}\right)^{-۱} * \left([۱ \quad ۱ \quad ۱] * \begin{bmatrix}۳۶ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۸۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۹\end{bmatrix}^{-۱} * \begin{bmatrix}۴۵^\circ ۲۷' ۲۰''\\ ۴۵^\circ ۲۷' ۲۴''\\ ۴۵^\circ ۲۷' ۲۳''\end{bmatrix}\right) = ۴۵.۴۵۶$$

برای حل یک معادله غیر خطی ما ناچار به استفاده از یک مقدار اولیه برای مجهولات می باشیم، بنابراین جواب بدست آمده یک جواب تقریبی خواهد بود. پس مدل های غیر خطی را عموما با یک روند غیر تکراری حل می کنیم. به این صورت که پس از یکبار بدست آوردن $\hat{x}$ این مقدار را به عنوان مقدار اولیه مجهولات جایگزین $x.$ کرده و دوباره مدل را حل می کنیم. این روند را آنقدر ادامه می دهیم که مقدار $\Delta\hat{x}$ $(\delta\hat{x})$ از ε که حد مجاز خطا می باشد کمتر گردد.

$$\hat{l} = A\hat{x}$$

$$l = f(\hat{x})$$

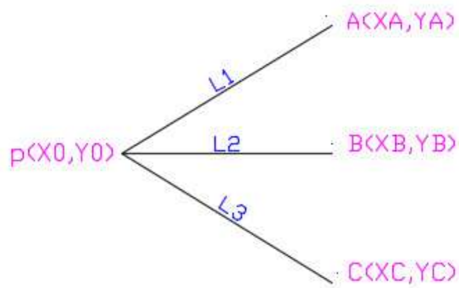
$$f(\hat{x}) = f(x.) + \frac{\partial f}{\partial x}|(\hat{x} - x.)_{x=x.}$$

$$\hat{l} = l. + A\delta\hat{x} \implies \hat{l} - l. = A\delta\hat{x} \implies \delta\hat{l} = A\delta\hat{x}$$

$$\delta\hat{x} = (A^T\omega^{-۱}A)^{-۱}A^T\omega^{-۱}\delta l$$

$$\hat{x} = \delta\hat{x} + x.$$

مثال : A وBوC نقاطی با مختصات نعلوم هستند، جهت تعیین مختصات نقطه P مشاهدات طولی $L1$ و$L2$ و $L3$ انجام شده است. اگر مختصات اولیه نقطه P را برابر $X0$و$y0$ در نظر بگیریم، مطلوب است مدل پارامتریک و تعیین مختصات واقعی نقطه p



$$l = \begin{bmatrix} l1 \\ l2 \\ l3 \end{bmatrix}$$ مشاهدات

$$x = \begin{bmatrix} xp \\ yp \end{bmatrix}$$ مجهولات

$$df = n - u = ۳ - ۲ = ۱$$ درجه آزادی

$$\delta\hat{x} = (A^TA)^{-۱}A^T\delta l$$ چون غیر خطی است

$$l1 = \sqrt{(XA - XP)^۲ + (YA - YP)^۲}$$

$$l2 = \sqrt{(XB - XP)^۲ + (YB - YP)^۲}$$

$$l3 = \sqrt{(XC - XP)^۲ + (YC - YP)^۲}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} * ۲(XA - XP) & -\frac{۱}{۲} * ۲(YA - YP) \\ -\frac{۱}{۲} * ۲(XB - XP) & -\frac{۱}{۲} * ۲(YB - YP) \\ -\frac{۱}{۲} * ۲(XC - XP) & -\frac{۱}{۲} * ۲(YC - YP) \end{bmatrix}$$

$$\Delta l = l - l_{.} \Longrightarrow \Delta l = \begin{bmatrix} l1 \\ l2 \\ l3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l0 \\ l0 \\ l0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta x = (A^T A)^{-۱} A^T \delta l \quad \Longrightarrow \Delta x = \begin{bmatrix} \Delta xp \\ \Delta yp \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x0 \\ y0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta xp \\ \Delta yp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xp \\ yp \end{bmatrix}$$

مرحله دوم $\begin{bmatrix} x0 \\ y0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xp \\ yp \end{bmatrix}$ از اول شروع میکنیم

آنقدر ادامه می دهیم که $\varepsilon > \Delta x$ باشد.

در نرم افزار مطلب $l1=100\pm ۱(mm), l2=151\pm ۳(mm), l3=177 \pm ۵(mm)$

A=(100,100) , B=(150,150) , C=(200,175) , P0=(۲۰۰,۵۰)

$\varepsilon = ۰.۰۰۱$

$|\delta X| < ۰.۰۰۱$

مدل شرط خطی: در حل مدل شرط به تعداد درجه آزادی می توانیم معادله بنویسیم.

$Bl \neq ۰$

$B(l+e) = ۰$

$\begin{cases} Bl + Be = ۰ \\ e^T \omega e \to min \end{cases}$

$\varphi = e^T \omega e - ۲ * \lambda(Bl + Be) \to min$

$\frac{\partial \varphi}{\partial e} = e^T \omega + e^T \omega^T - ۲ * \lambda^T B = ۰ \Rightarrow \omega = \omega^T - ۲ * \lambda^T B = ۰$

$e^T \omega = \lambda^T B \qquad \mathrm{I}$

$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = -۲(Bl + Be)^T = ۰$

$Bl + Be = ۰ \qquad \mathrm{II}$

$\omega = \omega^T \Rightarrow ۲ * e^T \omega - ۲ * \lambda^T B = ۰ \Rightarrow e^T \omega = \lambda^T B \overset{\text{از طرفین } T}{\Longrightarrow} \omega^T e = B^T \lambda$

$\omega e = B^T \lambda \overset{*\omega^{-۱}}{\Longrightarrow} e = \omega^{-۱} B^T \lambda \quad \mathrm{I}$

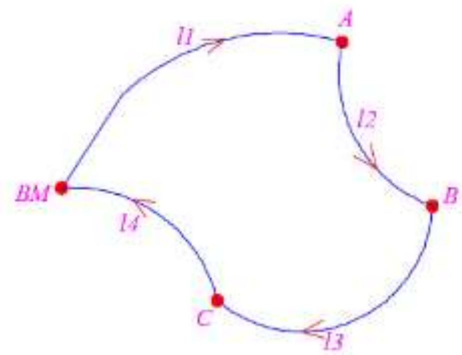
$\mathrm{I} \to \mathrm{II} \Rightarrow Bl + Be = ۰ \Rightarrow Bl + B(\omega^{-۱} B^T \lambda) = ۰$

$B\omega^{-۱} B^T = -Bl \overset{*(B\omega^{-۱}B^T)^{-۱}}{\Longrightarrow} \lambda = -(B\omega^{-۱} B^T)^{-۱} Bl$

$\mathrm{I} \to \mathrm{II} \quad e = -\omega B^T (B\omega^{-۱} B^T)^{-۱} Bl$

جواب کمترین مربعات مدل شرط

مثال: یک تراز یابی مطابق شکل به منظور محاسبه ارتفاع نقاط *A,B,C* انجام شده است. مطلوب است تشکیل معادله شرط:



$$df = n - u = ۴ - ۳ = ۱$$

درجه آزادی برابر ۱ است بنابراین در مدل شرط می بایست به تعداد درجه آزادی معادله بنویسیم

$$l1 + l2 + l3 + l4 = ۰$$

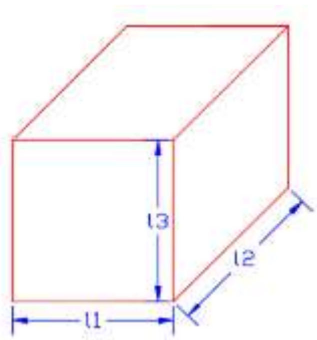
$$\mathrm{e} = -\omega B^T(B\omega^{-۱}B^T)^{-۱}Bl$$

$$B = [۱ \quad ۱ \quad ۱ \quad ۱] \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e} = -B^T(BB^T)^{-۱}Bl = -\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}\left([۱ \quad ۱ \quad ۱ \quad ۱] * \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}\right)^{-۱} * \left([۱ \quad ۱ \quad ۱ \quad ۱] * \begin{bmatrix} l1 \\ l2 \\ l3 \end{bmatrix}\right)$$

در ماتریس B در مدل شرط، مشتق معادلات نسبت به مشاهدات گرفته می شود.

مثال: در یک مکعب مربع به منظور تعیین حجم مکعب مشاهدات *l1* تا *l3* انجام شده است، مطلوب است تشکیل مدل شرط



$$df = n - u = ۳ - ۱ = ۲$$

به تعداد درجه آزادی می بایست معادله نوشت:

در ماتریس B در مدل شرط، مشتق معادلات نسبت به مشاهدات گرفته می شود.

$$l2 = l3 \Longrightarrow l2 - l3 = ۰$$

$$l1 = l3 \Longrightarrow l1 - l3 = ۰$$

$$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow B^T = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$l = \begin{bmatrix} l1 \\ l2 \\ l3 \end{bmatrix}$$

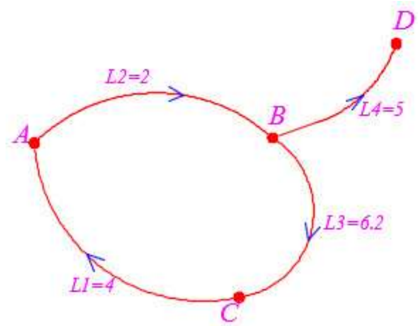
$$x = [x]$$

$$\omega = \mathrm{I}$$

$$\mathrm{e} = -\omega B^T(B\omega^{-۱}B^T)^{-۱}Bl \Longrightarrow \omega = \mathrm{I} \Longrightarrow \mathrm{e} = -B^T(BB^T)^{-۱}Bl$$

$$\mathrm{e} = -\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \right)^{-۱} * \left(\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} l1 \\ l2 \\ l3 \end{bmatrix} \right)$$

مثال : شــبکه تراز یابی زیر را در نظر بگیرید، با فرض معلوم بودن ارتفاع A به منظور تعیین ســایر نقاط مدل شــرط و پارامتریک را تشکیل دهید.



مدل شرط: $df = ۴ - ۳ = ۱$

به تعداد درجه آزادی معادله می نویسیم: $l1 + l2 + l3 = ۰$

$$B = [۱ \quad ۱ \quad ۱ \quad ۰]$$

$$e = -B^T(BB^T)^{-۱}Bl \Rightarrow e = -\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} * \left([۱ \quad ۱ \quad ۱ \quad ۰] * \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right)^{-۱} * [۱ \quad ۱ \quad ۱ \quad ۰] * \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \\ ۶.۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰.۰۶۶ \\ ۰.۰۶۶ \\ ۰.۰۶۶ \\ ۰.۰۶۶ \end{bmatrix}$$

مدل پارامتریک:

$x = \begin{bmatrix} hB \\ hC \\ hD \end{bmatrix}$ بردار مجهولات $\qquad l = \begin{bmatrix} l1 \\ l2 \\ l3 \\ l4 \end{bmatrix}$ بردار مشاهدات

$$\Delta hAB = hB - hA$$

$$\Delta hBC = hC - hB$$

$$\Delta hCA = hA - hC$$

$$\Delta hBD = hD - hB$$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = (A^TA)^{-۱}A^Tl = \left(\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right)^{-۱} * \left(\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ۲ \\ -۶.۲ \\ ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۲.۰۶۶ \\ -۴.۰۶۶ \\ ۷.۰۶۶ \end{bmatrix}$$

خطی سازی با استفاده از بسط تیلور:

$f(l) = ۰ \downarrow$

$f(\hat{l}) = f(l) + \frac{\partial f}{\partial \hat{l}} \left| (\hat{l} - l) \right._{\hat{l}=l}$ $\qquad f(l) = F$

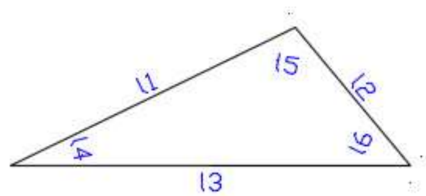
ماتریس ضرایب B : از معادلات بر حسب مشاهدات مشتق می گیریم.

$F + Be = ۰$

$\begin{cases} Bl + Be = ۰ \\ e^T \omega e \to min \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} F + Be = ۰ \\ e^T \omega e \to min \end{cases}$ غیر خطی $\quad e = -\omega^{-۱} B^T (B\omega^{-۱} B^T)^{-۱} F$

به ازای هر مشاهده باقیمانده را ارائه می دهد.

مثال: طول های l1 تا l3 و زوایای l4 تا l6 اندازه گیری شده اند. مطلوب است تشکیل مدل شرط



این مسئله فاقد مجهول است ولی ۶ مشاهده دارد ، لذا به تعداد مشاهدات می بایست معادله بنویسیم

برای تعریف معادله از روابط سینوس ها و کسینوس ها در مثلثات استفاده می کنیم.

$l4 + l5 + l6 - \pi = ۰ \to \text{I}$

$\frac{l1}{\sin l6} = \frac{l2}{\sin l4} = \frac{l3}{\sin l5}$ رابطه ها سینوس

$l1sinl4 - l2sinl6 = ۰ \to \text{II}$

$l2sinl5 - l3sinl4 = ۰ \to \text{III}$

$l1sinl5 - l3sinl6 = ۰ \to \text{IV}$

$l1 - \sqrt{l3^۲ + l2^۲ - ۲ * l2l3cosl6 = ۰} \to V$

$l2 - \sqrt{l1^۲ + l3^۲ - ۲ * l1l3cosl4 = ۰} \to VI$

$l3 - \sqrt{l1^۲ + l2^۲ - ۲ * l1l2cosl5 = ۰} \to VII$

ماتریس ضرایب را تشکیل می دهیم که به تعداد معادلات سطر و به تعداد مشاهدات ستون دارد

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ sinl4 & -sinl6 & ۰ & l1cosl4 & ۰ & -l2cosl6 \\ ۰ & sinl5 & -sinl4 & -l3cosl4 & l2cosl5 & ۰ \\ sinl5 & ۰ & -sinl6 & ۰ & l1cosl5 & -l3cosl6 \\ \frac{-(l1-l3cosl4)}{\sqrt{VI}} & \frac{-(l2-l3cosl6)}{\sqrt{V}} & \frac{-(l3-l2cosl6)}{\sqrt{V}} & ۰ & ۰ & \frac{-(l2-l3sinl6)}{\sqrt{V}} \\ \frac{-(l1-l3cosl6)}{\sqrt{VII}} & ۱ & \frac{-(l3-l1cosl4)}{\sqrt{VI}} & \frac{-(l1-l3sinl4)}{\sqrt{VI}} & ۰ & ۰ \\ & \frac{l2}{\sqrt{VII}} & \frac{۱-cosl5}{V11} & ۰ & \frac{-(l1-l3sinl5)}{\sqrt{VII}} & ۰ \end{bmatrix}$$

مدل ترکیبی:

در صورتی که روابط بین مشاهدات و مجهولات را نتوان بر حسب یکی از آن ها به صورت صریح نوشت یعنی معادلات ترکیبی از معادلات و مشاهدات باشند با یک مدل ترکیبی مواجه خواهیم بود. این مدل معمولا در شرایطی تشکیل می شود که تعداد مشاهدات به مراتب بیشتر از مجهولات است. در چنین حالتی عموما مدل خطی قابل تشخیص نیست. بنابراین حل این مدل را در ابتدا در حالت غیر خطی شروع می کنیم.

$l = Ax$ مدل پارامتریک

$Bl = ۰$ مدل شرط

خطی سازی با استفاده از بسط تیلور:

$$f(x.l) = ۰ \downarrow$$

$$\underbrace{f(x.l)}_{۰} = \underbrace{f(x_۰.l)}_{F} + \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{(x - x_۰)}_{\delta x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \hat{l}}}_{B}\underbrace{(\hat{l} - l)}_{e}$$

$$\begin{cases} A\delta x + Be + F = ۰ \\ e^T \omega e \rightarrow min \end{cases}$$

$$\varphi: e^T \omega e - ۲ * \lambda^T (A\delta x + Be + F) \rightarrow min$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial e} = e^T \omega^T + e^T \omega - ۲ * \lambda^T B = ۰ \qquad \omega^T = \omega \quad \Longrightarrow ۲ * e^T \omega - ۲ * \lambda^T B = ۰$$

$$e^T \omega - \lambda^T B \quad \xRightarrow{\text{طذفین را در } \omega^{-۱} \text{ ضرب میکنیم}}$$

$$e = \omega^{-۱} B^T \lambda \rightarrow I$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta x} = -2 * \lambda^T A = 0 \Longrightarrow \lambda^T A = 0 \quad \xrightarrow{T \text{ مگیریم}} \quad A^T\lambda = 0 \longrightarrow II$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = -2(A\delta x + Be + F) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A\delta x + Be + F \longrightarrow III$$

$$I \longrightarrow III \Longrightarrow \quad A\delta x + B\omega^{-1}B^T\lambda + F = 0 \quad \Longrightarrow B\omega^{-1}B^T\lambda = -(A\delta x + F) \quad \xrightarrow{\text{طرفین}*\omega^{-1}B^T\lambda}$$

$$\lambda = -(B\omega^{-1}B^T)^{-1}(A\delta x + F) \longrightarrow IV$$

$$IV \longrightarrow III \quad \Longrightarrow -A(B\omega^{-1}B^T)^{-1}(A\delta x + F) = 0$$

$$A^T((B\omega^{-1}B^T)^{-1}A\delta x = -A^T((B\omega^{-1}B^T)^{-1}F \quad \xrightarrow{\text{طرفین}*A^T((B\omega^{-1}B^T)^{-1}A^{-1}}$$

$$\delta x = -(A^T((B\omega^{-1}B^T)^{-1}A))^{-1}A^T((B\omega^{-1}B^T))^{-1}F$$

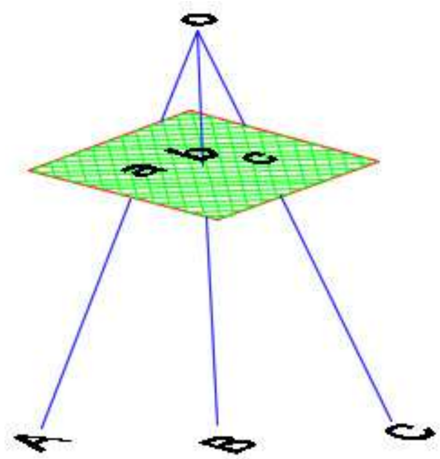
جواب کمترین مربعات در مدل ترکیبی

در پارامتریک: $\delta x = (A^T\omega A)^{-1}A^T\omega l$ و در مدل شرط: $e = B^T\omega^{-1}(B^T\omega^{-1}B)\omega l$

$\delta x < \varepsilon$ ادامه تا $\longmapsto$ $x = x_0 + \delta x$

جواب کمترین مربعات برای حالت باقیمانده: $e = B^T\omega^{-1}(B^T\omega^{-1}B)\omega l(A\delta x + F)$

مثال : مطابق شکل در یک عکس هوایی مختصات سه نقطه کنترل زمینی و نقاط عکسی نظیر آن ها مشاهده شده است. به منظور تعیین مختصات مرکز تصویر عکس هوایی مدل ترکیبی را تشکیل دهید.



بردار مشاهدات
$$l = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ x_B \\ y_B \\ z_B \\ x_C \\ y_C \\ z_C \\ x_a \\ y_a \\ z_a \\ x_b \\ y_b \\ z_b \\ x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}$$

بردار مجهولات
$$x = \begin{bmatrix} x. \\ y. \\ z. \end{bmatrix}$$

مرحله سوم: $\delta x = -(A^T((B\omega^{-1}B^T)^{-1}A))^{-1}A^T((B\omega^{-1}B^T))^{-1}F$

مرحله چهارم: تشخیص معادلات←--- از روش شرط هم خطی در فتوگرامتری

$$oaA = \frac{x. - x_a}{x_a - x_A} = \frac{y. - y_a}{y_a - y_A} = \frac{z. - z_a}{z_a - z_A}$$

$$obB = \frac{x. - x_b}{x_b - x_B} = \frac{y. - y_b}{y_b - y_B} = \frac{z. - z_b}{z_b - z_B}$$

$$ocC = \frac{x. - x_c}{x_c - x_C} = \frac{y. - y_c}{y_c - y_C} = \frac{z. - z_c}{z_c - z_C}$$

$$(x. - x_a)(y_a - y_A) - (x_a - x_A)(y. - y_a) = 0 \dashrightarrow 1$$

$$(y. - y_a)(z_a - z_A) - (y_a - y_A)(z. - z_a) = 0 \dashrightarrow 2$$

$$(x. - x_b)(y_b - y_B) - (x_b - x_B)(y. - y_b) = 0 \dashrightarrow 3$$

$$(y. - y_b)(z_b - z_B) - (y_b - y_B)(z. - z_c) = 0 \dashrightarrow 4$$

$$(x. - x_c)(y_c - y_C) - (x_c - x_C)(y. - y_c) = 0 \dashrightarrow 5$$

$$(y. - y_c)(z_c - z_C) - (y_c - y_C)(z. - z_c) = 0 \dashrightarrow 6$$

مرحله پنجم: ماتریس ضرایب A (مشتق معادلات نسبت به مجهولات:

$$\begin{array}{ccc} x. & y. & z. \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} (y_a - y_A) & -(x_a - x_A) & 0 \\ 0 & (z_a - z_A) & -(y_a - y_A) \\ (y_b - y_B) & -(x_b - x_B) & 0 \\ 0 & (z_b - z_B) & -(y_b - y_B) \\ (y_c - y_C) & -(x_c - x_C) & 0 \\ 0 & (z_c - z_C) & -(y_c - y_C) \end{bmatrix}$$

مرحله ششم(تعریف ماتریس F):

جایگزین کردن مقدار اولیه $x.$ و $y.$ و $z.$ در معادلات که خروجی آن یک ماتریس ۱*۶ خواهد بود.

$$F = \begin{bmatrix} (x. - x_a)(y_a - y_A) - (x_a - x_A)(y. - y_a) \\ (y. - y_a)(z_a - z_A) - (y_a - y_A)(z. - z_a) \\ (x. - x_b)(y_b - y_B) - (x_b - x_B)(y. - y_b) \\ (y. - y_b)(z_b - z_B) - (y_b - y_B)(z. - z_c) \\ (x. - x_c)(y_c - y_C) - (x_c - x_C)(y. - y_c) \\ (y. - y_c)(z_c - z_C) - (y_c - y_C)(z. - z_c) \end{bmatrix}$$

مرحله هفتم: ماتریس ضرایب B: مشتق معادلات نسبت به مشاهدات

$$\left[\begin{array}{l} \overbrace{(y. - y_a)}^{x_A} \quad \overbrace{(x. - x_a)}^{y_A} \quad \overbrace{0}^{z_A} \; \overbrace{0}^{x_B} \; \overbrace{0}^{y_B} \; \overbrace{0}^{z_B} \; \overbrace{0}^{x_C} \; \overbrace{0}^{y_C} \; \overbrace{0}^{z_C} \quad \overbrace{(-y_a + y_A) - (y. - y_a)}^{x_a} \quad \overbrace{(x. - x_a) + (-x_a + x_A)}^{y_a} \quad \overbrace{0}^{z_a} \; \overbrace{0}^{x_b} \; \overbrace{0}^{y_b} \; \overbrace{0}^{z_b} \; \overbrace{0}^{x_c} \; \overbrace{0}^{y_c} \; \overbrace{0}^{z_c} \\ 0 \quad (-z. + z_a) \quad (-y. + y_a) \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \quad (-z_a + z_A) - (z. - z_a) \quad (y. - y_a) - (-y_a + y_A) \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad (y. - y_b) \quad (-x. + x_b) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \; 0 \; 0 \quad (-y_b + y_B) - (y. - y_b) \quad (x. - x_b) - (-x_b + x_B) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (-z. + z_c) \quad (-y. + y_b) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \; 0 \; 0 \quad 0 \quad (-z_b + z_B) - (z. - z_c) \quad (y. - y_b) \quad 0 \quad 0 \quad (y_b - y_B) \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (y. - y_c) \quad (-x. + x_c) \quad 0 \; 0 \; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (-y_c + y_C) - (y. - y_c) \quad (x. - x_c) + (x_c - x_C) \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (z. - z_c) \quad (-y. + y_c) \; 0 \; 0 \; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (-z_c + z_C) - (z. - z_c) \quad (y. - y_c) + (y_c - y_C) \end{array}\right]$$

آماره آزمون: با f نشان داده می شود و حدود بالا و پایین ζ_{max} و ζ_{min} درستی آزمون با $P(\zeta_{min} < f < \zeta_{max})$ بررسی می شود به این صورت که اگر آماره بین دو عدد ζ_{max} و ζ_{min} باشد، فرض صفر تایید شده و در غیر این صورت رد می شود.

آزمون میانگین: در آزمون میانگین برابری مقدار میانگین یعنی μ را با یک مقدار اولیه مورد بررسی قرار می دهیم.

$$\text{فرض}\begin{cases} H_۰: \mu = a \\ H_۱: \mu \neq a \end{cases}$$

$$\text{آماره } f = \frac{\overbrace{E(l)}^{\text{میانگین گیری مشاهدات}} \qquad \mu}{\underset{\text{انحراف معیار}}{\dfrac{\widetilde{\sigma}}{\underbrace{\sqrt{n}}_{\text{تعداد مشاهدات}}}}}$$

$$\text{تابع توزیع } f \sim \overbrace{N}^{\text{جدول آماری تابع توزیع نرمال}}$$

$\zeta_{\frac{\alpha}{۲}} < f < \zeta_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \Longrightarrow$ خطای سیستماتیک نیست فرض صفر تایید می شود

$\zeta_{\frac{\alpha}{۲}} \not< f \not< \zeta_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \Longrightarrow$ خطای سیستماتیک نیست فرض صفر رد می شود

مثال: زاویه ای ۲۰ بار اندازه گیری شده است. اگر اندازه این زاویه برابر "۳۰°۳۲'۱۵ باشد، وجود خطای سیستماتیک در مشاهدات را بررسی کنید در حالی که واریانس مشاهدات برابر "۱۶ باشد.در صورتی که سطح اعتبار $\zeta_{۱-\frac{\alpha}{۲}=۱.۹۶}$ و $\zeta_{\frac{\alpha}{۲}=-۱.۹۶}$

"۳۰°۳۲'۱۵	15	16	18	17	13	14	12	17	16	17	16	18	14	12	15	14	20	15	14

$\sigma^2 = 16 \Longrightarrow \sigma = 4$

$$\text{آزمون میانگین} = f = \frac{E(l) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sum_۱^{۲۰} - ۳۰°۳۲'۱۵"}{\frac{٤}{\sqrt{۲۰}}} = \frac{۳۰°۳۲'۱۵.۳" - ۳۰°۳۲'۱۵"}{\frac{٤}{\sqrt{۲۰}}} \Longrightarrow f = -۱.۹٦ < ۰.۳۲٥ < ۱.۹٦$$

$$\text{فرض}\begin{cases} H_۰: \mu = ۳۰°۳۲'۱۵" \\ H_۱: \mu \neq ۳۰°۳۲'۱۵" \end{cases}$$

$H_۰: \mu = ۳۰°۳۲'۱۵"$ لذا فرض صفر تایید می شود و این به معنای عدم وجود خطای سیستماتیک در مشاهدات است.

آزمون وریانس: برای کنترل مشاهدات مورد استفاده قرار می گیرد. به این معنا که با انجام این آزمون متوجه می شویم که در ماتریس وریانس و کواریانس مشاهدات انجام داده ایم مقدار واقعی ، صحیح می باشد یا نمی باشد.

$$\text{فرض}\begin{cases} H_{0}: \sigma^{2} = a \\ H_{1}: \sigma^{2} \neq a \end{cases}$$

$$f = \frac{n \times s^{2}}{\sigma^{2}}$$

$$s^{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(l_i - \mu)^{2}}{n}$$

$$P\left(\chi^2_{n\,.\frac{\alpha}{2}} < f < \chi^2_{n\,.1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

در مثال قبل صحت دقت اسمی دستگاه مورد استفاده را بررسی کنید در حالی که داشته باشیم:

$$\chi^2_{20\,.0.25} = 9.591$$

$$\chi^2_{20\,.0.975} = 34.17$$

$$f = \frac{n \times s^{2}}{\sigma^{2}} \Longrightarrow s^{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(l_i - \mu)^{2}}{n} = \frac{88}{20} = 4.4$$

$$f = \frac{n \times s^{2}}{\sigma^{2}} = \frac{88}{16} = 5.5$$

$$9.591 < 5.5 < 34.17 \Longrightarrow \text{فرض صفر رد می شود}$$

دقت اسمی دستگاه صحیح نمی باشد.