نکاتی در خصوص بردارها:

کمیت نرده ای (اسکالر) : فقط با یک عدد قابل توصیف می باشد. همانند وزن

کمیت برداری: علاوه بر مقدار جهت را نیز نمایش می دهند.

نکته۱: برای تفریق فقط از روش مثلث استفاده می شود.

نکته۲: برای جمع کردن از دو روش مثلث و متوازی الاضلاع استفاده می شود.

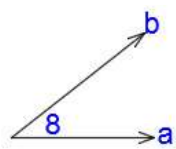
نکته۳: دو بردار بر یکدیگر تقسیم نمی شوند.

جمع دو بردار:

اندازه بردار $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(X_B - X_A)^۲ + (Y_B - Y_A)^۲ + (Z_B - Z_A)^۲}$$

ضرب بردارها:

۱- ضرب داخلی(اسکالر) جوابش همیشه یک عدد است. $\vec{a}.\vec{b}$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta \qquad |\vec{a}||\vec{b}| = axbx + ayby + azbz$$

نکته۱: مهمترین کاربرد ضرب داخلی محاسبه زاویه بین دو بردار خواهد بود.

نکته۲: وقتی ضرب دو بردار برابر صفر شد. آن دو بردار عمود بر یکدیگر خواهند بود.

نکته۳: جواب نهایی ضرب داخلی یک عدد خواهد بود.

مثال ۱: زاویه بین دو بردار $\vec{A} = \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k}$ و بردار $\vec{B} = -۲(i) + k$ را محاسبه کنید.

$$A = (۱.۱.۱) \qquad B = (-۲.۰.۱)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(۱ * (-۲)\right) + (۱ * ۰) + (۱ * ۱) = -۱$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۳}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{-۲^۲ + ۰^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta \Rightarrow -۱ = \sqrt{۳} * \sqrt{۵} * cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{-۱}{\sqrt{۳} * \sqrt{۵}}$$

مثال۲: زاویه بین دو بردار $\vec{A} = ۲(\mathrm{i}) - \mathrm{j} - \mathrm{k}$ و $\vec{B} = -i - ۲(j)$ را بدست آورید.

$A = (۲.-۱.-۱) \qquad B = (-۱.-۲.۰)$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \big(۲ * (-۱)\big) + \big(-۱ * (-۲)\big) + (-۱ * ۰) = ۰$

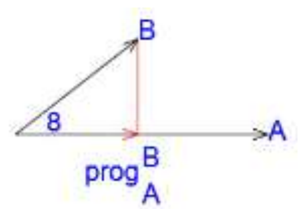
$|\vec{A}| = \sqrt{(-۱)^۲ + (-۲)^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۶}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(-۱)^۲ + (-۲)^۲ + (۰)^۲} = \sqrt{۵}$

در تعاریف اولیه به این نکته اشاره شد که اگر $\mathrm{a.b} = ۰$ شد نشان دهنده قائمه بودن دو بردار را دارد . لذا بر همین اساس زاویه بین ۹۰ درجه خواهد بود.

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta \Longrightarrow ۰ = \sqrt{۳} * \sqrt{۵} * cos\theta \Longrightarrow cos\theta = ۰ \Longrightarrow \theta = ۹۰$

نکته : دومین کاربرد ضرب داخلی پیدا کردن تصویر یک بردار بر روی بردار دیگر است.



$$prog_A^B = \frac{\vec{B}.\vec{A}}{|\vec{A}|}\vec{A} \qquad prog_B^A = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}\vec{B}$$

مثال۳: اگر $\vec{A} = -۲(\mathrm{i}) + ۳(\mathrm{j}) + ۳(\mathrm{k})$ و بردار $\vec{B} = i + j + k$ باشد. تصویر بردار B را روی بردار A پیدا کنید.

$A = (-۲.۳.۳) \qquad B = (۱.۱.۱)$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-۲ * ۱) + (۳ * ۱) + (۳ * ۱) = ٤$

$|\vec{A}| = \sqrt{(-۲)^۲ + ۳^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۲۲}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(۱)^۲ + (۱)^۲ + (۱)^۲} = \sqrt{۳}$

$$prog_A^B = \frac{\vec{B}.\vec{A}}{|\vec{A}|}\vec{A} = \frac{٤}{\sqrt{۲۲}}(-۲.۳.۳) = \left(\frac{-۸}{\sqrt{۲۲}}.\frac{۱۲}{\sqrt{۲۲}}.\frac{۱۲}{\sqrt{۲۲}}\right)$$

$$prog_B^A = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}\vec{B} = \frac{٤}{\sqrt{۳}}(۱.۱.۱) = \left(\frac{٤}{\sqrt{۳}}.\frac{٤}{\sqrt{۳}}.\frac{٤}{\sqrt{۳}}\right)$$

مثال٤: زاویه بین دو بردار $A = (۱.۰.۱)$ و $B = (k.۲.۱)$ برابر $\frac{\pi}{٤}$ است. مقدار π را بدست آورید.

$$A = (۱.۰.۱) \qquad B = (k.۲.۱)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (۱ * k) + (۰ * ۲) + (۱ * ۱) = k + ۱$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{۱^۲ + ۰^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{k^۲ + (۲)^۲ + (۱)^۲} = \sqrt{k^۲ + ٥}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| cos\theta \Longrightarrow k + ۱ = \sqrt{۲} * \sqrt{k^۲ + ٥} * \overbrace{cos\,\pi/٤}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Longrightarrow k + ۱ = \sqrt{k^۲ + ٥}$$

دو طرف تساوی را به توان ۲ می رسانیم $\overbrace{(k + ۱)^۲}^{\text{اتحاد اول}} = (\sqrt{k^۲ + ٥})^۲$

$$k^۲ + ۲ * k + ۱ = k^۲ + ٥ \Longrightarrow ۲ * k = ٥ - ۱ \Longrightarrow k = \frac{٤}{۲} = ۲$$

۲- ضرب خارجی بردار ها:

نکته: جواب ضرب خارجی بردار خواهد بود.

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| sin\theta$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = \left(+(A_y B_z - A_z B_y)i . -(A_x B_Z - A_z B_x)j . +(A_x B_y - A_y B_x)k\right)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ B_x & B_y & B_Z \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}$$

مثال: دترمینان $\begin{bmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را محاسبه نمایید.

$$\begin{cases} +(۲ - ٦)i \\ -(۱ - ۰)j \\ +(۲ - ۰)k \end{cases} \Longrightarrow (-٤(i) . -j . ۲(k))$$

مثال: مساحت مثلثی را حساب کنید که نقاط زیر سه راس آن باشد.

$A = (١.٢.٣)$ و $B = (٣.٠.-٣)$ و $C = (٥.٢.٦)$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \big((٣-١).(٠-٢).(-٣-٣)\big) = (٢.-٢.-٦)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \big((٥-١).(٢-٢).(٦-٣)\big) = (٤.٠.٣)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ ٢ & -٢ & -٦ \\ ٤ & ٠ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\left(+\overbrace{(-٢*٣)-(-٦*٠)}^{+١٢_i}\right) - \overbrace{\big((٢*٣)-(-٦*٤)\big)}^{+٣٠_j} + \overbrace{\big((٢*٠)-(-٢*٤)\big)}^{+٨_k} = (١٢_i.٣٠_j.٨_k)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(١٢^٢ + ٣٠^٢ + ٨^٢)} = ٣٣.٢٩$$

$$S = \frac{١}{٢}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{٣٣.٢٩}{٢} = ١٦.٦٤$$

معادله خط در فضا:

$\vec{u}(a.b.c)$

$p_.(x_..y_..z_.)$

$$\text{معادلات پارامتری خط}\begin{cases} x = at + x_. \\ y = bt + y_. \\ z = ct + z_. \end{cases}$$

$$\frac{x - x_.}{a} = \frac{y - y_.}{b} = \frac{z - z_.}{c}$$

مثال: خطی از نقطه ی $p_.(٢.-٤.١)$ و موازی با $\vec{u}(٣.٢.-١)$ است. معادله پارامتری و متقارن آن را بنویسید.

$$\text{معادلات پارامتری خط}\begin{cases} x = at + x_. \Rightarrow x = ٣(t) + ٢ \\ y = bt + y_. \Rightarrow y = ٢(t) - ٤ \\ z = ct + z_. \Rightarrow z = -t + ١ \end{cases}$$

$$\frac{x - ٢}{٣} = \frac{y + ٤}{٢} = \frac{z - ١}{-١}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(٤.-٦.٥)$ و $B(٢.٣.٠)$ می گذرد.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-٢.٩.-٥)$$

$$\text{معادلات پارامتری خط}\begin{cases} x = at + x_. \Rightarrow x = -٢(t) + ٢ \\ y = bt + y_. \Rightarrow y = ٩(t) + ٣ \\ z = ct + z_. \Rightarrow z = -٥(t) + ٠ \end{cases}$$

$$\frac{x - ٢}{-٢} = \frac{y - ٣}{٩} = \frac{z - ٠}{-٥}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $p_٠(-٢.٣.١)$ می گذرد و عمود بر صفحه **yz** باشد.

$$\text{معادلات پارامتری خط}\begin{cases} x = at + x_٠ \Longrightarrow x = ١(t) - ٢ \\ y = bt + y_٠ \Longrightarrow y = ٠(t) + ٣ \\ z = ct + z_٠ \Longrightarrow z = ٠(t) + ١ \end{cases}$$

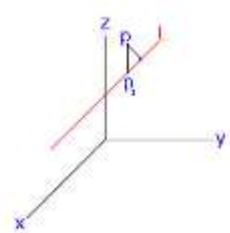
$$\frac{x+٢}{١} = \frac{y-٣}{٠} = \frac{z-١}{٠}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $p_٠(-٢.٣.١)$ می گذرد و موازی بر صفحه **yz** باشد.

$$\text{معادلات پارامتری خط}\begin{cases} x = at + x_٠ \Longrightarrow x = ٠(t) - ٢ \\ y = bt + y_٠ \Longrightarrow y = ١(t) + ٣ \\ z = ct + z_٠ \Longrightarrow z = ١(t) + ١ \end{cases}$$

$$\frac{x+٢}{٠} = \frac{y-٣}{١} = \frac{z-١}{١}$$

فاصله یک خط از یک نقطه:



$$D = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{P_٠P}\right|}{|\vec{u}|}$$

مثال: فاصله نقطه $P(٥.-٦.٢)$ از خط L به معادلات پارامتری $\begin{cases} x = ١ \\ y = -١ + ٤(t) \\ z = ٢ - ٣(t) \end{cases}$ بدست آورید.

$p_٠(١.-١.٢)$

$\vec{u}(٠.٤.-٣)$

$\vec{P}(٥.-٦.٢)$

$$D = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{P_٠P}\right|}{|\vec{u}|}$$

$$\overrightarrow{P_٠P} = p - p_٠ = (٤.-٥.٠)$$

$$\left|\vec{u} \times \overrightarrow{P_٠P}\right| = \begin{bmatrix} i & j & k \\ ٠ & ٤ & -٣ \\ ٤ & -٥ & ٠ \end{bmatrix} = ١٥(i) - ١٢(j) - ١٦(k)$$

$$D = \frac{\sqrt{(-١٥)^٢ + (-١٢)^٢ + (-١٦)^٢}}{\sqrt{٠^٢ + ٤^٢ + (-٣)^٢}} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$$

وضعیت نسبی دو خط در فضا: $\vec{u_۱} \times \vec{u_۲} = ۰$

$$\frac{x-x_۰}{a}=\frac{y-y_۰}{b}=\frac{z-z_۰}{c}$$

نشان دهید که دو معادلات خط زیر موازی هستند.

$$L1=\frac{x-۱}{-۲}=\frac{y+۱}{۱}=\frac{z-۱}{۲}$$

$$L2=x=-۲(y)=-z+۱$$

$$u1(-۲.۱.۲)\ \&\ u2(۱.-\frac{۱}{۲}.-۱)\Longrightarrow\frac{u1}{u2}=-\frac{۲}{۱}=\frac{۱}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{-۱}\Longrightarrow -۲=-۲=-۲$$

وضعیت دو خط زیر را نسبت به هم بررسی کنید.

$$L1=\frac{x-۲}{۲}=\frac{y+۲}{۱}=\frac{z-۲}{-۱}$$

$$L2=\frac{x-۱}{۱}=\frac{y}{-۲}=\frac{z}{۲}$$

$$u1(۲.۱.-۱)\ \&\ u2(۱.-۲.۲)\Longrightarrow\frac{u1}{u2}=\frac{۲}{۱}=-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Longrightarrow -۲=-۲=-۲$$

$$u2(۱.-۲.۲)\begin{cases}x=at+x_۰\Longrightarrow x=۱\Longrightarrow t+۱\\ y=bt+y_۰\Longrightarrow y=-۲\Longrightarrow t+۰\\ z=ct+z_۰\Longrightarrow z=۲\ \Longrightarrow t+۰\end{cases}$$

$$\frac{t+۱-۲}{۲}=\frac{-۲*t+۲}{۱}=\frac{۲*z-۲}{-۱}\Longrightarrow\frac{t-۱}{۲}=\frac{-۲*t+۲}{۲}\Longrightarrow ۵*t=۵\Longrightarrow t=۱$$

ضعیت دو خط زیر را نسبت به هم بررسی کنید.

$$L1=\frac{x+۱}{۲}=\frac{y}{-۱}=\frac{z+۲}{۱}\Longrightarrow u1(۲.-۱.۱)$$

$$L2=\frac{x}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z}{۳}\Longrightarrow u2(۱.۲.۳)\Longrightarrow\frac{u1}{u2}\neq\frac{۲}{۱}\neq-\frac{۱}{۲}\neq\frac{۱}{۳}\Longrightarrow \text{موازی نیستند}$$

$$u1(۲.-۱.۱)\Longrightarrow\underbrace{\begin{cases}x=at+x_۰\Longrightarrow x=۲*t-۱\\ y=bt+y_۰\Longrightarrow y=-۱*t+۰\\ z=ct+z_۰\Longrightarrow z=۱*t-۲\end{cases}}_{\text{در معادله دوم میدهیم}}$$

$$\Longrightarrow L2=\frac{x}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z}{۳}\Longrightarrow L2=\frac{۲*t-۱}{۱}=\frac{-t}{۲}=\frac{t-۲}{۳}$$

$$\Longrightarrow ٤*t-۲=-t\Longrightarrow ۵*t=۲\Longrightarrow t=\frac{۲}{۵}\ \&-۳*t=۲*t-٤\Longrightarrow -٤=۵*t\Longrightarrow t=-\frac{٤}{۵}$$

متقاطع هم نیستند

معادله صفحه:

$R(a.b.c)$ نرمال $\quad (x_.,y_.,z_.) \Longrightarrow a(x-x_.)+b(y-y_.)+c(z-z_.)$

مثال: معادله صفحه ای را بنویسید که از نقطه $A(\overset{x_.}{۲},\overset{y_.}{۳},\overset{z_.}{-۱})$ گذشته و بر بردار $r=\overset{a}{۳}(i)+\overset{b}{۲}(j)+\overset{c}{۱}(k)$ عمود باشد.

$$a(x-x_.)+b(y-y_.)+c(z-z_.) \Longrightarrow ۳(x-۲)+۲(y-۳)+۱(z+۱)=۰$$

$$۳(x)-۶+۲(y)-۶+۱=۰ \Longrightarrow ۳(x)+۲(y)+z=۱۱$$

مثال: معادله صفحه ای را بنویسید که از نقطه $A(\overset{x_.}{-۳},\overset{y_.}{۲},\overset{z_.}{۱})$ گذشته و برخط $r=\frac{x}{\underbrace{3}_{a}}+\frac{y-۱}{\underbrace{۲}_{b}}+\frac{z+3}{\underbrace{-1}_{c}}$ عمود باشد.

$$۳(x+۳)+۲(y-۲)+(z+۱)=۰$$

مثال: معادله صفحه ای را بنویسید که از نقطه $A(\overset{x_.}{۲},\overset{y_.}{۳},\overset{z_.}{-۱})$ گذشته و با دو بردار $\vec{u}:۲(i)+j-۳(k)$ و $\vec{V}=i+j+۳(k)$ موازی باشد.

$$(x-۲)+(y-۳)+(z+۱)=۰$$

C: بر هر دوی آن ها عمود باشد. $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$

$$\vec{r}=\vec{u}\times\vec{V} \Longrightarrow \begin{bmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۱ & -۳ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}=۶(i)+۹(j)+k$$

مثال:معادله خط گذرا از نقطه $A(\overset{x_.}{۲},\overset{y_.}{-۱},\overset{z_.}{۰})$ و عمود بر صفحه $\overset{a}{۲}(x)\overset{b}{-۳}(y)+\overset{c}{٤}(z)$ را بنویسید.

$u(a.b.c)$

$p_.(x_.,y_.,z_.)$

$$\frac{x-x_.}{a}=\frac{y-y_.}{b}=\frac{z-z_.}{c}$$

$$\frac{x-۲}{۲}=\frac{y+۱}{-۳}=\frac{z-۰}{٤}$$

مثال:معادله صفحه ای را بنویسید که از نقطه $A(\overset{x_.}{۱},\overset{y_.}{۲},\overset{z_.}{۳})$ می گذرد و موازی صفحه $\overset{r(۰.۰.۱)}{\overbrace{x=y}}$ باشد.

$$a(x-x_.)+b(y-y_.)+c(z-z_.)=۰$$

$$۰(x-۱)+۰(y-۲)+۱(z-۳)=۰ \Longrightarrow z-۳=۰ \Longrightarrow z=۳$$

مثال: معادله صفحه ای را بنویسید که از نقاط $A(\overbrace{۱}^{x.},\overbrace{۰}^{y.},\overbrace{۲}^{z.})$ و $B(-۱,۳,۴)$ و $C(۳,۵,۷)$ می گذرد.

$$a(x-x.)+b(y-y.)+c(z-z.)=۰$$

$$\vec{r}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(-۲.۳.۲)$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(۲.۵.۵)$$

$$\vec{r}=\begin{bmatrix} i & j & k \\ -۲ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۵ & ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow r=۵(i)+۱۴(j)-۱۶(k)$$

$$۵(x-۱)+۱۴(y-۰)-۱۶(z-۲)=۰$$

وضعیت نسبی دو صفحه در فضا:

موازی: $\overrightarrow{n1}\times\overrightarrow{n2}=۰$ & $n2=\lambda n1$

متقاطع: فصل مشترک ← خط ← $\vec{u}=\overrightarrow{n1}\times\overrightarrow{n2}$

مثال: وضعیت دو صفحه به معادلات $۳(x)-۲(y)+z=۱$ و $۵(x)+۴(y)-۶(z)=۲$ نسبت به هم را مشخص کنید.

$$n1(3.-2.1)\quad \&\quad n2(5.4.-6)\Rightarrow\frac{n1}{n2}=\frac{3}{5}\neq\frac{-2}{4}\neq\frac{1}{-6}\Rightarrow$$ موازی نیستند

$$\frac{x-x.}{a}=\frac{y-y.}{b}=\frac{z-z.}{c}$$ معادله فصل مشترم

$$\vec{u}=\overrightarrow{n1}\times\overrightarrow{n2}=\begin{bmatrix} i & j & k \\ ۳ & -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ & -۶ \end{bmatrix}\Rightarrow r=-۱۶(i)+۲۳(j)+۲۲(k)$$

$$\frac{x}{-۱۶}=\frac{y}{۲۳}=\frac{z}{۲۲}$$

فاصله یک نقطه از یک صفحه:

$$D = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{p \cdot p}|}{|\vec{n}|}$$

مثال: فاصله نقطه $p(۰,۲,۱)$ از صفحه به معادله $x + y + \sqrt{۲}z + ۲ - \sqrt{۲}$ را بدست آورید.

$\vec{n}(۱.۱.\sqrt{۲})$

$p(۰.۲.۱)$

$p.(\sqrt{۲}.-۲.۰)$ دلخواه

$\overrightarrow{p \cdot p} = p - p. = (-\sqrt{۲}.٤.۱)$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{p \cdot p} = -\sqrt{۲} + ٤ + \sqrt{۲} = ٤$

$\vec{n}(۱.۱.\sqrt{۲}) \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + \sqrt{۲}^۲} = ۲ \Rightarrow D = \frac{٤}{۲} = ۲$

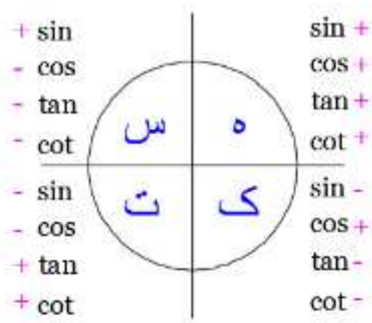
مروری بر مثلثات:

		$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
	0	90	180	270	360	30	60	45
SIN ϴ	0	1	0	-1	0	(1/2)	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$
COS ϴ	1	0	-1	0	1	$\sqrt{3}/2$	(1/2)	$\sqrt{2}/2$
TAN ϴ	0	⋈	0	⋈	0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	1
COT ϴ	⋈	0	⋈	0	⋈	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	1

برای تبدیل سایر زوایا می بایست از روابطی که بر اساس ۹۰ و ۱۸۰ تعریف می شوند می بایست استفاده نمود.

$$۱۲۰ = ۹۰ + \overset{\text{میبایست در جدول باشد}}{۳۰} \quad or \quad ۱۲۰ = ۱۸۰ - \overset{\text{میبایست در جدول باشد}}{۶۰}$$

$$۱۲۰^{\circ}\begin{cases}\begin{cases}\sin ۱۲۰ = \sin(\cancel{۱۸۰ -}\ ۶۰) = sin60\\ \cos ۱۲۰ = \cos(\cancel{۱۸۰ -}\ ۶۰) = cos60\end{cases}\\ \begin{cases}\tan ۱۲۰ = \tan(\cancel{۱۸۰ -}\ ۶۰) = tan60\\ \cot ۱۲۰ = \cot\ \underline{(\cancel{۱۸۰ -}\ ۶۰)} = cot60\end{cases}\end{cases}$$



❖ حاصل این قسمت در هر کدام از ربع های مثلثاتی باشد بر اساس قرار داد های درج شده عمل می کنیم و در این مثال $۱۲۰ = (۱۸۰ - ۶۰)$ در ربع دوم قرار دارد لذا فقط سینوس مثبت خواهد بود و همانند زیر عمل می کنیم. نسبت ها ثابت است.

❖ اگر بر اساس و بر حسب ۱۸۰ بنویسیم مثبت های مثلثاتی عوض نمی شود ولی اگر بر اساس ۹۰ بنویسیم نسبت های مثلثاتی تغییر می کند.(همانند مثال زیر که بر اساس ۹۰ نوشته شده و نسبت های مثلثاتی تغییر کرده است.)

$$۱۲۰^{\circ}\begin{cases}\begin{cases}\sin ۱۲۰ = \sin(۹۰ + ۳۰) = cos60 = +\sqrt{۳}/\\ \cos ۱۲۰ = \cos(۹۰ + ۳۰) = sin60 = \quad ۱/۲\end{cases}\\ \begin{cases}\tan ۱۲۰ = \tan(۹۰ + ۳۰) = cot60 = -\sqrt{۳}\\ \cot ۱۲۰ = \cot\ \underline{(۹۰ + ۳۰)} = tan60 = \sqrt{۳}/۳\end{cases}\end{cases}$$

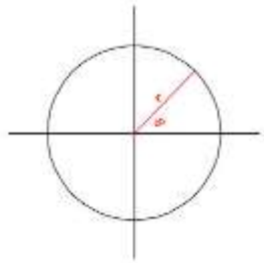
در مثال ۷۵۰ درجه چون بر حسب ۱۸۰ نو شته شده ا ست نسبت های مثلثاتی تغییر نمی کند و در ربع اول قرار دارد لذا علامت های همگی مثبت خواهد بود.

$$۷۵۰^{\circ} = ٤ * ۱۸۰ + ۳۰\begin{cases}\begin{cases}\sin ۳۰ = ۱/۲\\ \cos ۳۰ = \sqrt{۳}/۲\end{cases}\\ \begin{cases}\tan ۳۰ = \sqrt{۳}/۳\\ \cot ۳۰ = \sqrt{۳}\end{cases}\end{cases}$$

برای ۱۳۵ درجه :

$$۱۳۵^{\circ} = ۹۰ + ٤۵\begin{cases}\begin{cases}\cos ٤۵ = \sqrt{۲}/۲\\ \sin ٤۵ = -\sqrt{۲}/۲\end{cases}\\ \begin{cases}\cot ٤۵ = -۱\\ \tan ٤۵ = -۱\end{cases}\end{cases}$$

❖ مختصات قطبی:



$(r.\theta)$

❖ تبدیل مختصات دکارتی به قطبی:

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} \qquad \theta = arc\ tan\frac{y}{x}$$

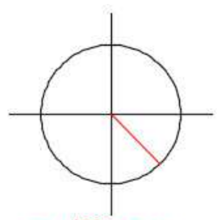
❖ تبدیل مختصات قطبی به دکارتی:

$$x = rcos\theta \qquad y = rsin\theta$$

مثال: مختصات نقطه $p = (٦.٧\frac{\pi}{٤})$ را با مختصات دکارتی بنویسید.

$$x = rcos\theta = ٦ \times cos7\frac{\pi}{٤} \Rightarrow x = ٦ \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = ٣\sqrt{٢}$$

$$y = rsin\theta = ٦ \times sin7\frac{\pi}{٤} \Rightarrow y = ٦ \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = -٣\sqrt{٢}$$



7*(180/4)=315

مثال : مختصات دکارتی نقطه $p = (٣.٥\frac{\pi}{٢})$ را بنویسید.

$$x = rcos\theta = ٣ \times cos5\frac{\pi}{٢} \Rightarrow x = ٠$$

$$y = rsin\theta = ٦ \times sin5\frac{\pi}{٢} \Rightarrow y = ٣$$

مثال: مختصات قطبی نقطه $(\text{۱}.\sqrt{\text{۳}})$ را بنویسید.

$$r=\sqrt{x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}\Longrightarrow\sqrt{\text{۱}^{\text{۲}}+\sqrt{\text{۳}}^{\text{۲}}}=\text{۲}$$

$$\theta=arc\tan\frac{y}{x}\Longrightarrow arc\tan\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۱}}\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{\text{۳}}$$

مثال: مختصات قطبی نقطه $(-\text{۱}.-\sqrt{\text{۳}})$ را بنویسید.

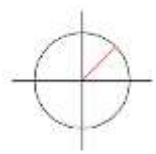
$$r=\sqrt{x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}\Longrightarrow\sqrt{-\text{۱}^{\text{۲}}+(-\sqrt{\text{۳}}^{\text{۲}})}=\text{۲}$$

$$\theta=arc\tan\frac{y}{x}\Longrightarrow arc\tan\frac{-\sqrt{\text{۳}}}{-\text{۱}}\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{\text{۳}}$$

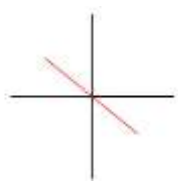
❖ مکان در قطبی و دکارتی می بایست یکسان باشد . در غیر اینصورت اگر در محاسبات چنین اتفاقی نیفتد آن را با روابط ریاضی اصلاح می کنیم.

معادلات معروف در دستگاه مختصات قطبی:

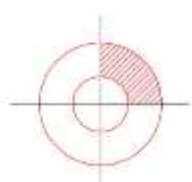
دایره $r=a \quad or \quad \sqrt{x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}$



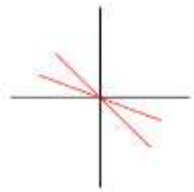
خط گذرنده از مبدا با زاویه α $\theta=\alpha \quad or \quad \theta=\text{۲}\frac{\pi}{\text{۳}}$



$$\theta=\alpha\,.r=a\begin{cases}\text{۰}<\theta<\frac{\pi}{\text{۲}}\\ \text{۱}<r<\text{۲}\end{cases}$$



$۲\frac{\pi}{۳} \leq \theta \leq ۳\frac{\pi}{٤}$



مثال: معادله قطبی یک نمودار برابر $r^{۲} = ٤ \times sin2\theta$ است. معادله دکارتی آن را بیابید؟

$$r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} \quad and \quad r^{۲} = ٤ \times sin2\theta \Longrightarrow \left(\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}\right)^{۲} = ٤ \times \overbrace{sin2\theta}^{۲\times sin\theta cos\theta}$$

$$x^{۲} + y^{۲} = ۸ \times \overbrace{sin\theta}^{\frac{y}{r}} \overbrace{cos\theta}^{\frac{x}{r}} \Longrightarrow x^{۲} + y^{۲} = \frac{۸ \times x \times y}{r^{۲}} \Longrightarrow x^{۲} + y^{۲} = \frac{۸ \times x \times y}{\left(\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}\right)^{۲}}$$

$$x^{۲} + y^{۲} = \frac{۸ \times x \times y}{x^{۲} + y^{۲}} \overset{\text{طرفین وسطین}}{\Longrightarrow} (x^{۲} + y^{۲})^{۲} = ۸ \times x \times y$$

مثال: معادله دکارتی یک نمودار عبارت است از $x^{۲} + y^{۲} + ٤ \times x = ۰$ ، معادله قطبی آن را بنویسید.

$x = rcos\theta$

$y = rsin\theta$

$x^{۲} + y^{۲} + ٤ \times x = ۰$

$(rcos\theta)^{۲} + (rsin\theta)^{۲} - ٤(rcos\theta) = ۰$

$r^{۲}cos\theta^{۲} + r^{۲}sin\theta^{۲} - ٤ \times r \times \cos\theta = ۰$

$r^{۲}\overbrace{(cos\theta^{۲} + sin\theta^{۲})}^{۱} - ٤ \times r \times \cos\theta = ۰$

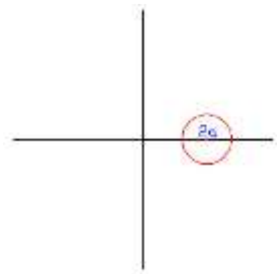
$r^{۲} - ٤ \times r \times \cos\theta = ۰ \Longrightarrow r(r - ٤ \times cos\theta) = ۰$

$$\begin{cases} r = ۰ \\ r = ٤ \times cos\theta \end{cases}$$

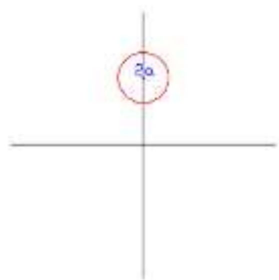
شعاع ندارد و به صورت نقطه می باشد.

$r = ۲ \times a \times cos\theta \Rightarrow r = ۲ \times a\frac{x}{r} \Rightarrow r^{۲} = ۲ \times a \times x \Rightarrow x^{۲} + y^{۲} = ۲ \times a \times x$

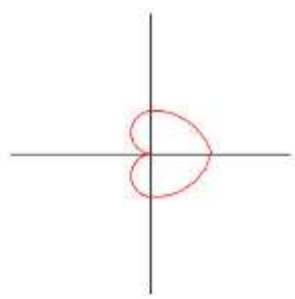
$x^{۲} + y^{۲} - ۲ \times a \times x = ۰$



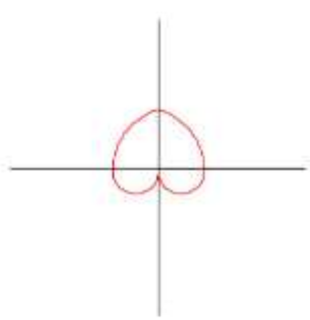
$r = ۲ \times a \times sin\theta$



$r = a(۱ + cos\theta)$



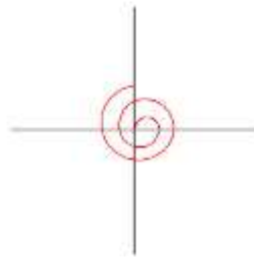
$r = a(۱ + sin\theta)$



$r = \theta$

$$r = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sqrt{x^۲ + y^۲} = \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲ + y^۲ = \frac{\pi^۲}{٤}$$

به x و y عدد می دهیم.



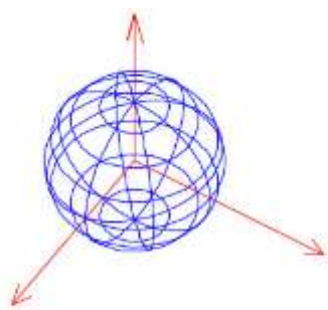
توابع چند متغیره

رویه ها (سطح):

رویه های استوانه ای – رویه های مخروطی – رویه های دوار – رویه های شناخته شده درجه ۲

رویه های شناخته شده درجه ۲:

۱) $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ کره به شعاع a

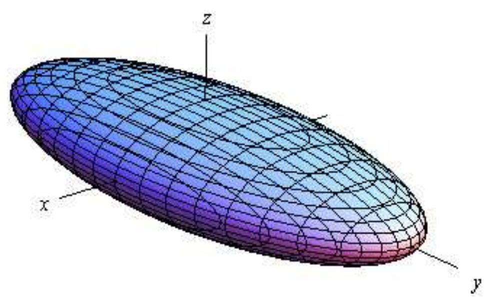


۲) $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱$ شکل بیضی گون

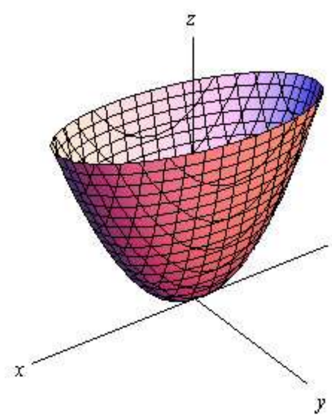
در راستای محور $a>b.c \Longrightarrow x$

در راستای محور $b>a.c \Longrightarrow y$

در راستای محور $c>a. \Longrightarrow z$



۳) سهمی گون

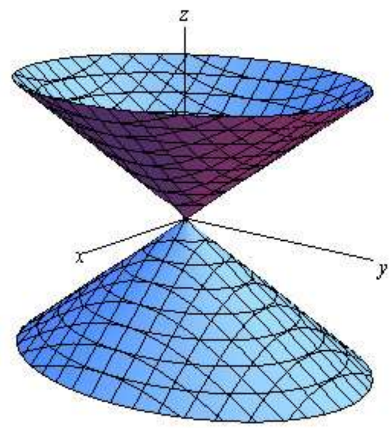


x در راستای محور $ax=\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}$

y در راستای محور $by=\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}$

z در راستای محور $cz=\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}$

۴) مخروط

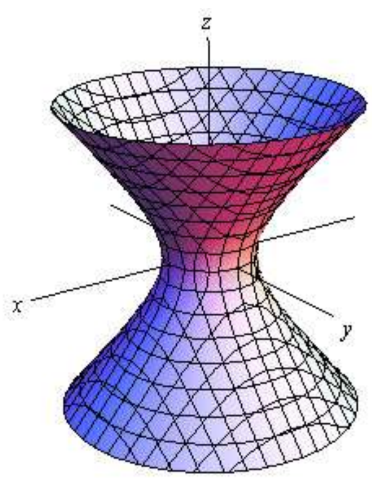


$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} = \frac{y^{۲}}{b^{۲}} + \frac{z^{۲}}{c^{۲}}$ در راستای محور x

$\frac{y^{۲}}{b^{۲}} = \frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{z^{۲}}{c^{۲}}$ در راستای محور y

$\frac{z^{۲}}{c^{۲}} = \frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}}$ در راستای محور z

۵) هذلولی گون یکپارچه

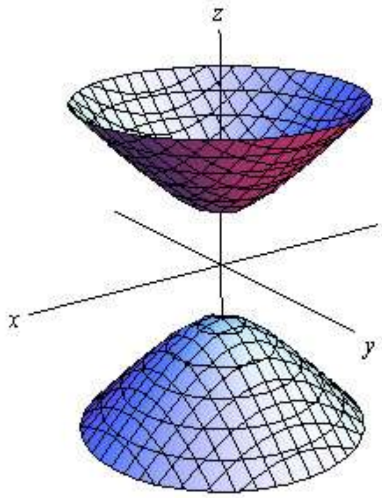


$-\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} + \frac{z^{۲}}{c^{۲}} = ۱$ در راستای محور x

$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} - \frac{y^{۲}}{b^{۲}} + \frac{z^{۲}}{c^{۲}} = ۱$ در راستای محور y

$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} - \frac{z^{۲}}{c^{۲}} = ۱$ در راستای محور z

۶) هذلولی گون ۲ پارچه:

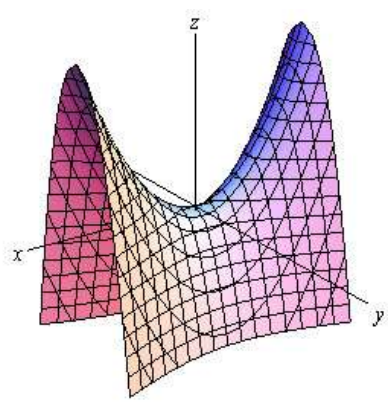


$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ در راستای محور x

$-\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ در راستای محور y

$-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ در راستای محور z

۷) سهمی گون هذلولی(زین اسبی)



$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=cz$ در راستای محور x

$-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=by$ در راستای محور y

$-\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=ax$ در راستای محور z

❖ قاعده مشتق زنجیره ای:

$$f(\overset{u(x.y)}{\widetilde{u}} \;.\; \overset{v(x.y)}{\widetilde{v}})$$

$$f(u.v) = u^{۲} + \frac{۱}{۲}v$$

$$u(x.y) = x^{۲} + y \quad and \quad v(x.y) = \frac{۱}{۲}y + xy$$

بعد از آماده سازی می بایست به عبارت اولیه برسیم

مثال: فرض کنید: $y = cost$ and $x = sint$ and $f(x.y) = x^{۲}y + xy^{۲}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (2 \times xy + y^{۲})(cost) + (x^{۲} + ۲ \times xy)(-sint)$$

مثال: $z = cost$ and $y = t^{۲}$ and $x = sint$ and $f(x.y.z) = \ln(x+y+z)$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\ln(a) = \frac{\text{مشتق } a}{a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \overbrace{\left(\frac{1}{x+y+z}\right)}^{\frac{\partial f}{\partial x}} \overbrace{(cost)}^{\frac{\partial x}{\partial t}} + \overbrace{\left(\frac{1}{x+y+z}\right)}^{\frac{\partial f}{\partial y}} \times \overbrace{(۲ \times t)}^{\frac{\partial y}{\partial t}} + \overbrace{\left(\frac{1}{x+y+z}\right)}^{\frac{\partial f}{\partial z}} \overbrace{(-sint)}^{\frac{\partial z}{\partial t}}$$

❖ دیفرانسیل کامل: در چنین حالتی ∂ تبدیل به d می شود که دیفرانسیل کامل خواهد شد.

$$f(x\,.y\,.z)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

مثال : فرض کنید : $f(x.y.z) = ysinx + zcosy$ دیفرانسیل کامل f را محاسبه کنید.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ycosx \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = sinx + z(-siny) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = cosy$$

$$df = (ycosx)dx + (sinx - zsiny)dy + (cosy)dz$$

❖ عملگر ها یا اپراتور ها

۱- اپراتور گرادیان $\vec{\nabla}f$: $\vec{\nabla}=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ وقتی روی تابع عمل می کند ، تابع را به بردار تبدیل می کند. خاصیت این عملگر ، بردار عمود بر رویه یا سطح می باشد.

مثال: معادله رویه ای به صورت $e^{x^۲-y}+z^۳-۲=۰$ توصیف شده است، معادله صفحه مماس و خط عمود بر این رویه را در نقطه ای با مختصات (۱ . ۱ . ۱) بدست آورید.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۲\times xe^{x^۲-y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-e^{x^۲-y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=۳\times z^۲$$

$$\vec{\nabla}f=۲\times xe^{x^۲-y}-e^{x^۲-y}+۳\times z^۲$$

$$\overbrace{(۱ . ۱ . ۱)\Rightarrow\vec{\nabla}f=۲(i)-j+۳(k)}^{\text{بردار عمود رویه}}$$

$$\overbrace{a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰}^{\text{معادله صفحه}}$$

$$۲(x-۱)-(y-۱)+۳(z-۱)=۰$$

۲- عملگر لاپلاسین $\nabla^2 f$ دو بار مشتق می گیریم $\nabla^2 f=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}$

مثال : لاپلاسین تابع زیر را محاسبه نمایید.

$$f(x . y . z)=x^۳y+zy^۲+xz$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=۳\times x^۲y+۰+z=(۳\times y)(۲\times x)=٦\times xy$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=x^۳+۲\times yz=۲\times z$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}=y^۲+x=۰$$

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}=٦\times xy+۲\times z$$

۳- عملگر دیورژانس $\nabla\cdot f$

فقط از مولفه i نسبت به x و j نسبت به y و k نسبت به z مشتق گرفته می شود.

$$f=p\vec{i}+q\vec{j}+R\vec{k}$$

$$\nabla\cdot f=\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

مثال: $f = x^{۲}\vec{i} + (y - z^{۲})\vec{j} + (z^{۲} - x)\vec{k}$

$$\nabla \cdot f = ۲ \times x + ۱ + ۲ \times z$$

۴- عملگر کرل $\vec{\nabla} \times$

تابعی که پیچش یا چرخش را نشان می دهد

$$f = p\vec{i} + q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$\nabla \times f = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & R \end{bmatrix}$$

مثال: $f = (x^{۲} - y)i + y^{۲}j + (z - x^{۳})k$

$$\nabla \times f = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^{۲} - y & y^{۲} & z - x^{۳} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(z - x^{۳}) - \left(\frac{\partial}{\partial z}y^{۲}\right)i - \left(\frac{\partial}{\partial x}(z - x^{۳})\right) - \frac{\partial}{\partial z}(x^{۲} - y)j + \frac{\partial}{\partial x}y^{۲} - \frac{\partial}{\partial y}(x^{۲} - y)k$$

$$(۰ + ۰)i - (-۳(x^{۲}) - ۰)j + k = ۰(i) + ۳(x^{۲})j + k$$

مثال: برای تابع مقابل کرل و دیورژانس را محاسبه کنید.

$$f = (\cos x)i + (y^{۲} - ۳ * z)j + (y - \sin z)k$$

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -\sin x + ۲(y) - \cos z$$

$$\nabla \times f = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos x & y^{۲} - ۳(z) & y - \sin z \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y - \sin z) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y^{۲} - ۳(z)\right)i - \frac{\partial}{\partial x}(y - \sin z) - \frac{\partial}{\partial z}(\cos x)j + \frac{\partial}{\partial x}(y^{۲} - ۳(z) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos x)k$$

$$= +۴(i)$$