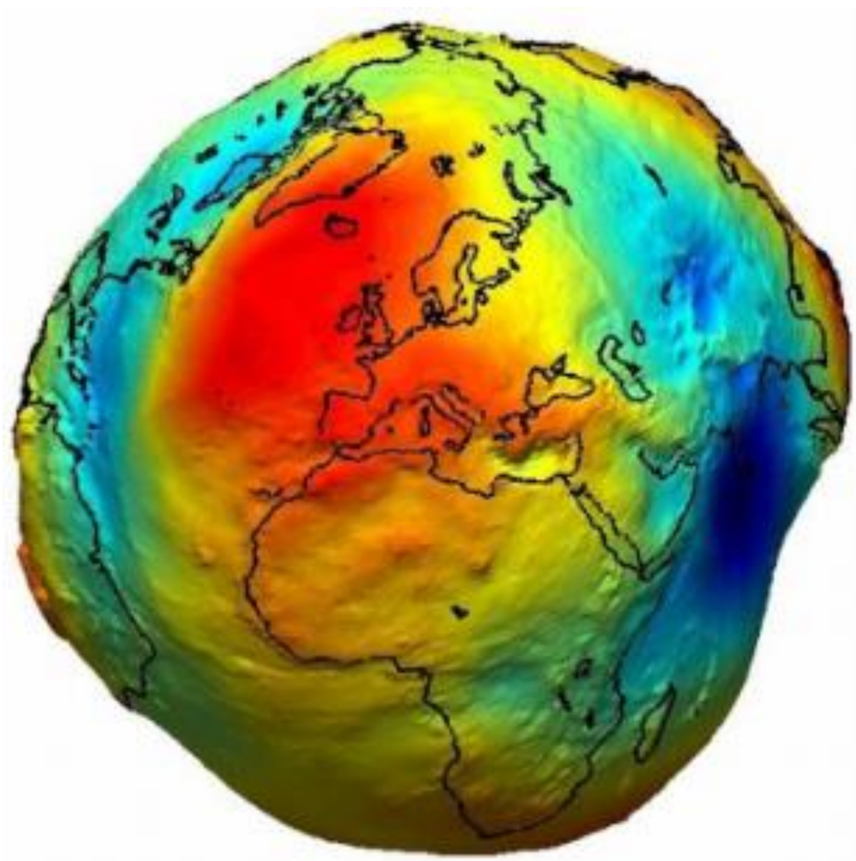
بنام خداوند جان خرد



فیزیکال ژئودزی

هدف فیزیکال ژئودزی در رشته نقشه برداری مشاهده تاثیر فیزیک زمین بر روی مشاهدات می باشد. یکی از اثرات فیزیک زمین بر مشاهدات پدیده انکسار است. تاثیر دیگر میدان مغناطیسی زمین است . این میدان مشاهدات ما را تحت تاثیر خودش قرار می دهد و این اثر بسیار اندک است. پدیده دیگری که مشاهدات ما را تحت تاثیر خودش قرار می دهد نیروی کریوس است که یک نیروی اینرشیال است. وقتی وارد بحث می شودکه یک جسم نسبت به یک سیستم مختصاتی که خودش نسبت به یک سیستم اینرشیال در حرکت باشد. یعنی وسیه اندازه گیری ما داخل یک جسم متحرک باشد. $F= ma$ در چهارچوب اینرشیال کار می کند. یکی دیگر از نیروهای اینرشیال نیروی گریز از مرکز است که به آن نیروی اینرشیال ساختگی هم گفته می شود، زیرا ماهیتا وجود ندارد. از نیروی گریز از مرکز نمی توانیم صرف نظر کنیم. یک نیروی دیگر که تاثیر خیلی زیادی روی مشاهدات ما دارد، نیروی جاذبه است که نمی توان از این نیرو نیز صرف نظر کرد.

هدف فیزیکال ژئودزی مطالعه دو نیروی زیر است.

۱- نیروی گریز از مرکز
۲- نیروی جاذبه

نیروی ثقل = نیروی گریز از مرکز+نیروی جاذبه

آشنایی با چند اپراتور یا عملگر ریاضی قبل از ورود به مباحث فیزیکال ژئودزی

❖ **اپراتور گرادیان**: گرادیان یک تابع را با علامت نبلا (∇) نشان می دهیم.

$$\nabla_V^F(\overrightarrow{r}) = \frac{\partial V_V^F}{\partial x}\acute{\imath} + \frac{\partial V_V^F}{\partial y}\acute{\jmath} + \frac{\partial V_V^F}{\partial z}\acute{k}$$

اپراتور گرادیان بر روی یک تابع اسکالر اعمال شده و حاصل آن یک بردار خواهد بود.

❖ **اپراتور دیورژانس**: دیورژانس یا واگرایی، حاصلضرب داخلی عملگر مشتق∇ با یک بردار است.

$$div\,\vec{F} = \vec{\nabla} * \vec{F} = \lim_{V\to.} \oiint \frac{F * ds}{V.} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

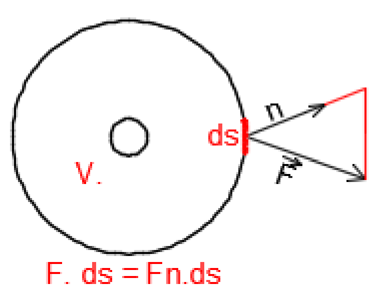
انتگرال دو گانه روی سطح بسته

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

این اپراتور بر خلاف گرادیان بر روی بردار عمل کرده و یک عدد (یا اسکالر) را نتیجه می دهد.

تذکر: تعبیر هندسی گرادیان به تعبیر مشتق بر می گرددو همانطور که می دانیم مشتق نشان دهنده میزان تغییرات در راستاهای مختلف می باشد. گرادیان نیز نشان دهنده تغییرات تابع مورد نظر (تابع F) است.

تذکر: تعبیر دیورژانس به تعبیر شار عبوری می ماند و در واقع دیورژانس برابر است با شار عبوری از یک بسته هنگامیکه این سطح به سمت صفر میل می کند یعنی شار عبوری از یک نقطه را با دیورژانس نشان می دهیم (div)



اگر n بردار عمود بر المان سطحی کوچک ds باشد، مفهوم انتگرال دو گانه ($\oiint F * ds$) این است که با ضرب نقطه ای بین f و ds میزان نیروی F عمود بر سطح کوچک را (fn) بر مساحت ds ضرب کرده و آن را روی کل سطح انتگرال بگیریم در حالیکه حجم محاط توسط این سطح به سمت صفر میل می کند.

پس نتیجه کار شار عبوری از یک نقطه خواهد بود، اگر دیورژانس:

$$div\,\vec{F} = \vec{\nabla} * \vec{F} \begin{cases} > ۰ & \text{چشمه میدان} \\ = ۰ & \text{خنثی} \\ < ۰ & \text{چاه} \end{cases}$$

❖ **اپراتور لاپلاسین**: دیورژانس گرادیان یک تابع را لاپلاسین آن تابع گویند.

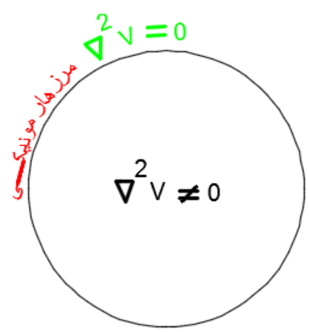
$$\Delta V = div(\vec{\nabla}) = \vec{\nabla} * (\vec{\nabla} V) = \vec{\nabla} * \left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) = \left(\frac{\partial^{۲} V}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} V}{\partial y^{۲}} + \frac{\partial^{۲} V}{\partial z^{۲}}\right)$$

$$\Longrightarrow \nabla^{۲} V = \frac{\partial^{۲} V}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} V}{\partial y^{۲}} + \frac{\partial^{۲} V}{\partial z^{۲}}$$

معادله لاپلاس: در صورتیکه لاپلاسین یک تابع برابر صفر شود با یک معادله لاپلاس مواجه خواهیم بود $\nabla^{۲} V = ۰$

توابع هارمونیک: توابعی که در معادله لاپلاس صدق می کنند را توابع هارمونیک گویند.

➢ تذکر: بجز توابع ثابت هیچ تابع دیگری در کل فضا هارمونیکی نیست، بنابراین اگر تابع V یک تابع هارمونیک باشد فقط در سطح مشخصی $\nabla^{۲} V = ۰$ را خواهیم داشت.



➢ مرز بین ناحیه ای که در آن تابع هارمونیک بوده و ناحیه ای که هارمونیک نمی باشد را مرز هارمونیکی گوییم.

اصل دیریخله: در صورتیکه مرز هارمونیکی یک تابع، مرزی هموار باشد(تغییراتی ناگهانی نداشته باشد) و مقادیر تابع روی آن مرز معلوم باشد، آن تابع منحصر به فرد بوده و بنابراین می توان آن را معلوم کرد.

اصل دیریخله بیان می کند که نمی توان دو تابع V1,V2 داشت که هر دو مرز هارمونیکی یکسان و مقادیر مرزی یکسانی داشته باشند. این نکته در جایی مفید است که، ما مرز هارمونیکی و مقادیر مرزی را داشته باشیم و بخواهیم خود تابع را معلوم کنیم. اصل دیرخله به ما تضمین می دهد که تابعی که با استفاده از این مقادیر معلوم بدست آورده ایم قطعا تابع مورد نظر ماست.

مسائل مقدار مرزی: زمانیکه تابع V مجهول باشد ولی مقادیر آن روی یک مرز معلوم باشد، می توانیم با حل یک مسئله مقدار مرزی، حوزه تابع را به صورت کلی معلوم نماییم.

انواع مسائل مقدار مرزی:

۱- **مسئله نوع اول یا مسئله دیریخله**: در صورتیکه تابع هارمونیک V مجهول باشد مرز هموار S و مقادیر تابع V روی مرز S معلوم باشد، برای تعیین تابع V با مسئله مقدار مرزی نوع اول مواجه خواهیم بود.

مرز S معلوم

V(r) معلوم

۲- **مسئله مقدار مرزی نوع دوم (نیومن)**: در صورتیکه تابع هارمونیک V مجهول بوده و مرز هموار S معلوم باشد، اما این بار روی مرز مقادیر مشتق تابع V معلوم باشد، با مسئله مقدار مرزی نوع دوم یا مسئله نیومن مواجه هستیم.

مرز S معلوم

$\frac{\partial V(r)}{\partial}$ معلوم

۳- **مسئله مقدار مرزی نوع سوم (مخلوط)**: در صورتیکه تابع هارمونیک V مجهول بوده و مرز هموار S معلوم باشد و روی مرز S ترکیبی خطی از مقادیر تابع و مشتق تابع معلوم باشد، مسئله مخلوط که ما مسئله فیزیکال ژئودزی می نامیم مواجه خواهیم بود.

مرز S معلوم

$C1 * r_{(r)} + \frac{\partial V}{\partial r}$ معلوم

حل معادله لاپلاس:

$$\nabla^۲ V = \frac{\partial^۲ V}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ V}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ V}{\partial z^۲} = ۰$$

$$V(x.y.z)$$

یکی از روش های حل معادله لاپلاس روش جداسازی متغیر ها می باشد. معادله لاپلاس یک معادله سه متغیره درجه ۲ بوده که بر حسب (x,y,z) می باشد. مقصود از جداسازی یا تفکیک متغیر ها این است که تابع v را که بر حسب (x,y,z) است را به صورت ضرب سه تابع بنویسیم که هر یک فقط بر حسب یک متغیر باشد.

بنابراین:

$$V = X_{(x)} * Y_{(y)} * Z_{(z)} \Rightarrow X_{(x)} * \Phi_{(y.z)}$$

ابتدا به جداسازی متغیر X و مشتق گرفتن، تابع V را در در معادله لاپلاس جایگزین می کنیم.

$\frac{\partial V}{\partial x} = X'_{(x)} * Y_{(y)} * Z_{(z)} = X'_{(x)}(\phi + \phi'' * X) = (X' * \phi)$

$\frac{\partial^{۲} y}{\partial x^{۲}} = X"_{(x)} * Y_{(y)} * Z_{(z)} = X''\phi + \phi" * X = X" * \phi$

$\frac{\partial V}{\partial Y} = X'\phi + \phi' yx = \phi' yx$

$\frac{\partial^{۲} V}{\partial y^{۲}} = \phi"_{yy} x$

$\frac{\partial V}{\partial Z} = \phi'_{z} x$

$\frac{\partial^{۲} V}{\partial z^{۲}} = \phi"_{zz} X$

$\nabla^{۲} V = \frac{\partial^{۲} V}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} V}{\partial y^{۲}} + \frac{\partial^{۲} V}{\partial z^{۲}} = X"\phi + \phi"_{yy} X + \phi"_{zz} X = X"\phi + X(\phi"_{yy} + \phi"_{zz}) = ۰$

طرفین را در $\frac{۱}{x\phi}$ ضرب می کنیم $\Longrightarrow \frac{X''\phi}{X\phi} + \frac{X(\phi_{yy} + \phi_{zz})}{X\phi} \Longrightarrow \frac{X''}{X} + \frac{(\phi"_{yy} + \phi"_{zz})}{\phi} = ۰$

در صورتی رابطه زیر برقرار است که دو طرف تابع ثابت باشند و در این صورت دو تابع هارمونیک هستند

$\frac{X"}{X} = -\frac{(\phi"_{yy} + \phi"_{zz})}{\phi} = C_{۱} \Longrightarrow \frac{X"}{X} = C_{۱} \Longrightarrow X" - C_{۱} X = ۰$ بر حسب x

$\frac{-(\phi"_{yy} + \phi"_{zz})}{\phi} = C_{۱} \Longrightarrow (\phi"_{yy} + \phi"_{zz}) + C_{۱}\phi = ۰$ *

رابطه زیر بر حسب دو متغیر X,Y

حال به جدا کردن دو متغیر X,Y می پردازیم

$(\phi"_{yy} + \phi"_{zz}) + C_{۱}\phi = ۰$

$\phi_{(y.z)} = Y_{(y)} * Z_{(z)}$

$\phi' y = y' * z$

$\phi"yy = y" * z \Rightarrow$ جایگذاری در فرمول ستاره در $y" * z + z" * y + C_{۱} y * z = ۰ \dashrightarrow * \frac{۱}{zy}$

$\Rightarrow \frac{y"}{y} + \frac{z"}{z} + C_{۱} = ۰ \Longrightarrow \frac{y"}{y} = -(\frac{z"}{z} + C_{۱}) = C_{۲}$

$$-\frac{Z''}{Z}-C_1=C_2 \Rightarrow -\frac{Z''}{Z}=C_1+C_2 \Rightarrow -Z=(C_1+C_2)Z \Rightarrow Y-C_2Y=0$$

$$Z''+(C_1+C_2)Z=0$$

به سه معادله درجه ۲ تک متغیره تبدیل می شود.

$$\begin{cases} X''-C_1x=0 \\ Y''-C_2y=0 \\ Z''+(C_1+C_2)Z=0 \end{cases}$$

معادلات اشتورم لیویل: *مجموعه معادلاتی وجود دارند که به شکل زیر نوشته می شوند.*

$$(K_{(x)}Y'_{(x)})'-q_{(x)}Y_{(x)}+\lambda\rho_{(x)}Y_{(x)}=0$$

پس از حل معادله لاپلاس سه متغیره با روش جداسازی متغیرها به سه معادله تک متغیره رسیدیم و باید توجه کنیم که این سه معادله از یکدیگر مستقل نیستند، زیرا برگرفته از معادله لاپلاس می باشند. در واقع ضرایب C_1 و C_2مرتبط کننده این سه معادله به یکدیگر هستند. بنابراین از بین بینهایت تابعی که می توانند جواب این سه معادله باشند آنهایی را انتخاب می کنیم که به ازای C_1 و C_2 های مشترک نوشته شوند.

تنها در این صورت است که با ضرایب آنها در یکدیگر و دستیابی به تابع هدف $V=X_{(x)}Y_{(Y)}Z_{(z)}$می توانیم

مطمئن شویم که تابع V جواب معادله لاپلاس اولیه خواهد بود.

اکنون کافیست سه معادله تک متغیره بدست آمده را حل کنیم. این سه معادله حالت خاصی از معادلات اشتورم لیویل هستند، به صورتیکه:

$$(K_{(x)}Y'_{(x)})'-q_{(x)}Y_{(x)}+\lambda\rho_{(x)}Y_{(x)}=0$$

$Y_{(x)}=X_{(x)}$

برای معادله دوم

$Y_{(x)}=X_{(x)}$

K(x)=1 $\Rightarrow$ x”-c1x=0

q(x)=0

$\rho(x)=1$

در اینصورت معادله شماره یک، یک معادله اشتورم لیویل است. جواب های معادله اشتورم لیویل دارای ویژگی خاصی هستند، و آن تعامد آنها بر یکدیگر است. یک معادله اشتورم لیویل بینهایت جواب دارد. اما نکته اینجاست که این بینهایت جواب بر یکدیگر عمود هستند.

عمود بودن توابع(تعامد در توابع): در فضای اقلیدوسی(هندسی) وقتی می خواهیم تعامد دو بردار را بررسی کنیم، ضری داخلی آنها را کنترل می کنیم، اگر ضرب داخلی برابر با صفر شد آن دو تابع بر یکدیگر عمود هستند. مبحثی

در ریاضیات به نام فانکشنال وجود دارد که به بررسی توابع به عنوان عناصر یک فضای برداری می پردازد. در چنین فضایی هر عنصری که شرایط خاصی مثل بسته بودن نسبت به عمل جمع و ضرب را داشته باشد می تواند یک بردار باشد. در ساده ترین حالت، توابع چند جمله ای بردار هستند.

اگر دو تابع $fi(x)$ و $fj(x)$ را دو بردار بدانیم، برای آنها نیز می توان ضرب داخلی تعریف کرد. ضرب داخلی بین دو تابع به صورت زیر تعریف می شود.

$$fi * fj = \int_a^b fi(x) * fj(x)dx$$

و در آن بازه a وb دامنه تابع fi و fj می باشند. بنابراین اگر جواب این انتگرال برابر صفر گردد، می توانیم بگوییم تابع fi بر تابع fj عمود است.

در اینجا نیز ضرب داخلی یک بردار در خودش برابر است با نرم آن بردار

$$\int_a^b fi(x) * fi(x)dx = Ni^۲(x)$$

که آن را برای تابع fi با $Ni^۲$ نمایش می دهیم. بنابراین در مورد توابعی که جواب معادلات اشتورم لیویل هستند می توان چنین نوشت:

زیرا بر یکدیگر عمود هستند

$$yi * yj = \int_a^b yi * yjdx = \begin{cases} \mathrm{Ni}^۲ & \mathrm{i} = \mathrm{j} \\ ۰ & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \end{cases}$$

جمع بندی: تا اینجا برای حل معادله لاپلاس از روش جداسازی متغیر ها استفاده کردیم و معادله لاپلاس سه متغیره را به سه معادله تک متغیره تبدیل کردیم و نشان دادیم که این سه معادله در واقع حالت خاصی از معادلات اشتورم لیویل هستند. بنابراین با حل آنها به بینهایت تابع خواهیم رسید که این توابع هارمونیک هستند زیرا جواب معادله لاپلاس می باشند و نیز بر یکدیگر عمود می باشند، زیرا جواب معادلات اشتورم لیویل هستند.

معادله لاپلاس در سیستم مختصات کروی:

V(r,$\theta.\lambda$)

$\theta = ۹۰ - \varphi$

$\nabla^۲ = ۰$

$$\nabla^{۲}V=\frac{۲}{r}*\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^{۲}v}{\partial r^{۲}}+\frac{cot\theta}{r^{۲}}*\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{۱}{r^{۲}}*\frac{\partial^{۲}v}{\partial\theta^{۲}}*\frac{۱}{r^{۲}sin^{۲}\theta}*\frac{\partial^{۲}v}{\partial\lambda^{۲}}=۰$$

تمرین: رابطه معادله لاپلاس در سیستم مختصات کروی را با استفاده از ضرایب لامه بدست آورید.

معادله بالا را جداسازی می کنیم و مجددا با استفاده از روش های جداسازی متغیر ها معادله لاپلاس را در سیستم مختصات کروی حل می کنیم. ابتدا متغیر اول یعنی r را جدا می کنیم و سپس متغیر دوم θ را جدا کرده و در نهایت متغیر سوم λ را جداسازی می نماییم.

$V(r,\theta.\lambda)=R_{(r)}*T_{(\theta)}*L_{(\lambda)}$

$V=R_{(r)}*\phi_{(\theta.\lambda)}$

متغیر اول $\frac{\partial V}{\partial r}=R'*\phi \quad\Longrightarrow\frac{\partial^{۲}v}{\partial r^{۲}}=R''*\phi$

متغیر دوم $\frac{\partial V}{\partial\theta}=\phi'\theta*R \quad\Longrightarrow\frac{\partial^{۲}v}{\partial\theta^{۲}}=\phi''_{(\theta.\theta)}*R$

متغیرسوم $\frac{\partial V}{\partial\lambda}=\phi'\lambda*R \quad\Longrightarrow\frac{\partial^{۲}v}{\partial\lambda^{۲}}=\phi''_{(\lambda.\lambda)}*R$

حال در معادله زیر جایگذاری می کنیم

$$\nabla^{۲}=\frac{۲}{r}*\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^{۲}v}{\partial r^{۲}}+\frac{cot\theta}{r^{۲}}*\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{۱}{r^{۲}}*\frac{۱}{r^{۲}sin^{۲}\theta}*\frac{\partial^{۲}v}{\partial\lambda^{۲}}=۰$$

$$\nabla^{۲}V=\frac{۲}{r}*R'\phi+R''\phi+\frac{cot\theta}{r^{۲}}*\phi'_{\theta}R+\frac{۱}{r^{۲}}*\phi''_{\theta\theta}R+\frac{۱}{r^{۲}sin^{۲}\theta}*\phi''_{\lambda\lambda}R=۰$$

نتیجه جداسازی را در $\frac{r^{۲}}{\phi R}$ ضرب می کنیم.

$$\nabla^{۲}V=\frac{۲*r*R'}{R}+\frac{R''r^{۲}}{R}+\frac{cot\theta\phi'\theta}{\phi}+\frac{\phi''\theta\theta}{\phi}+\frac{۱}{sin^{۲}\theta}+\frac{\phi''\lambda\lambda}{\phi}=۰$$

$$\frac{(۲*r*R')+r^{۲}R''}{R}=-\left(\frac{cot\theta\phi'\theta+\phi''\theta\theta}{\phi}\right)-\frac{\phi''\lambda\lambda}{sin^{۲}\theta\phi}=C_{۱}$$

دو عبارت را جداگانه مساوی $C_{۱}$ قرار می دهیم.

$$\frac{(۲*r*R')+r^{۲}R''}{R}=C_{۱}\Longrightarrow(۲*r*R')+r^{۲}R''=C_{۱}R\Longrightarrow \qquad (۲*r*R')+r^{۲}R-C_{۱}R=۰$$

معادله اول بر حسب r بدست آمد.

$$-\left(\frac{cot\theta\phi'\theta+\phi''\theta\theta}{\phi}\right)-\frac{\phi''\lambda\lambda}{sin^{۲}\theta\phi}=C_{۱}\Longrightarrow cot\theta\phi'\theta+\phi''\theta\theta+\frac{\phi''\lambda\lambda}{sin^{۲}\theta}+C_{۱}\phi=۰$$

اکنون پس از جداسازی متغیر اول یعنی r با استفاده از معادله حاصل شده بالا به جداسازی دو متغیر بعدی، یعنی θ و λ می پردازیم.

$$\phi_{(\theta.\lambda)} = T_\theta * L_\lambda$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \phi'_\theta = T' * L$$

$$\frac{\partial^۲\theta}{\partial\theta^۲} = \phi"_{\theta\theta} = T" * L$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda} = \phi'_\lambda = L' * T$$

$$\frac{\partial^۲\phi}{\partial\lambda^۲} = \phi"_{\lambda\lambda} = L" * T$$

در معادله اول که بر حسب r بدست آمده است جایگذاری می کنیم

$$cot_\theta T'L + T"L + \frac{\mathrm{L"T}}{\sin^۲\theta} + C_۱ T * L = ۰ \Rightarrow * \sin^۲\theta$$

برای ساده شدن مخرج $\sin^۲\theta$ رابطه بالا را در $\sin^۲\theta$ ضرب می کنیم $cot = \frac{cos}{\sin}$

$$sin_\theta * cos_\theta T'L + \sin^۲\theta * T^{"}L + L"T + C_۱\sin^۲\theta * T * L = ۰$$

در ادامه رابطه بالا در عبارت $\frac{۱}{\mathrm{LT}}$ که عامل جداساز است ضرب می گردد.

$$\frac{sin_\theta * cos_\theta T'}{T} + \frac{\sin^۲\theta T^{"}}{T} + \frac{L"}{L} + C_۱\sin^۲\theta = ۰$$

$$\frac{sin_\theta * cos_\theta T' + \sin^۲\theta T^{"}}{T} + C_۱\sin^۲\theta = -\frac{L"}{L} = C_۲$$

مخرج مشترک T می گیریم

$$sin_\theta * cos_\theta T' + \sin^۲\theta T^{"} + C_۱\sin^۲\theta = C_۲ T$$

$$sin_\theta * cos_\theta T' + \sin^۲\theta T^{"} + (C_۱\sin^۲\theta - C_۲)T = ۰$$

$$L'' + C_۲ L = ۰$$

$$sin_\theta * cos_\theta T' + \sin^۲\theta T^{"} + C_۱\sin^۲\theta T - C_۱ T = ۰$$

$$\sin^۲\theta T" + sin\theta cos\theta T' + (C_۱\sin^۲\theta - C_۲)T = ۰$$

با حل معادله لاپلاس به روش جداسازی متغیر ها به سه معادله اشتورم لیویل رسیدیم که این سه معادله عبارتند از: معادله اول بر حسب r و معادله دوم بر حسب θ و معادله سوم بر حسب λ می باشد.

$(2R'r) + r^۲R'' - C_۱ R = ۰$ I معادله اول

$\sin^2\theta T'' + \sin\theta\cos\theta T' + (C_1\sin^2\theta - C_2)T = 0$ II معادله لژاندر

$L'' + C_2 L = 0$ III معادله هارمونیک

اکنون کافیست این سه معادله را حل کرده و به ترتیب توابع $R(r)$ و $T(\theta)$ و $L(\lambda)$ بدست آید. در نهایت با ضرب این تابع در یکدیگر به تابع هدف یعنی تابع V دست یافته ایم. نکته قابل توجه اینجاست که این سه معادله بر گرفته از یک معادله هستند و آن معادله لاپلاس می باشد. بنابراین به یکدیگر مرتبط هستند و این ارتباط را ضرایب C_1 و C_2 برقرار می کنند. بنابراین از این بینهایت جوابی که در این سه معادله صدق می کنند، آنهایی را می پذیریم که به ازای C_1 و C_2 هایی مشترک نوشته شوند.

$(2R'r) + r^2R'' - C_1R = 0$ R=? $R_1 r = r^n$, $R_2 r = r^{-(n+1)} = \frac{1}{r^{n+1}}$

$L'' + C_2L = 0$ L=? $L_1(\lambda) = \sin x\lambda$ $L_2(\lambda) = \cos x\lambda$

$\sin^2\theta T'' + \sin\theta\cos\theta t' + (C_1\sin^2\theta - C_2)T = 0$ T=?

$T(\theta) = \rho nm(\cos\theta)$ توابع وابسته لژاندار

در معادله سوم به ازای m=0,1,... و n=0,1,.... C2=m^2 C_1=n(n+1)

معادله هارمونیک یعنی $(L'' + C_2L=0)$ توابع $\sin m\lambda$ و $\cos m\lambda$ به ازای m=0,1,0,... تنها در صورتی هارمونیک خواهد بود که $C_2 = m^2$ باشد. یعنی مجذور کامل باشد.

در مود معادله سوم یعنی معادله لژاندر باید ضریب C_2 همان m^2 در نظر بگیریم چرا که گفته شد ما از بین بینهایت جواب آنهایی را می پذیریم که به ازای C_1 و C_2 های مشترک نوشته شوند. پس در اینجا نیز $C_2 = m^2$ و m=0,1,2,... می باشد. اما در مورد ضریب C_1 می توان گفت در صورتی توابع وابسته لژاندر یعنی $\rho_{nm(\cos\theta)}$ جواب معادله لژاندر خواهند بود که $C_1 = n(n+1)$ باشد و n=0,1,2,.... می باشد. پس عملا سه تابع درجه ۲ تک متغیره که بر گرفته از معادله لاپلاس بودند حل شوند.

$R_1 r = r^n$, $R_2 r = r^{-(n+1)} = \frac{1}{r^{n+1}}$

$L_1\lambda = \sin(m\lambda)$, $L_2\lambda = \cos m\lambda$

$T_\theta = \rho_{nm}\cos\theta$

$\rho_{nm} = \frac{(1-t^2)^{\frac{n+m}{2}}}{2^n n!} * \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} * (t^2 - 1)^n$

$\rho_{nm}\cos\theta = \frac{(1-\cos^2\theta)^{\frac{n+m}{2}}}{2^n n!} * \frac{d^{n+m}}{d(\cos\theta)^{n+m}} * (\cos^2\theta - 1)^n$

$\rho_{..}(t) = \frac{1}{1} * 1 = 1$

به ازای N=1 , m=0,1 $\Longrightarrow \rho_{10}(t) = \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{2} * (t^2-1)' = \frac{\sqrt{1-t^2}}{2} * 2(t) = \frac{\sqrt{1-2t}}{2}$

به ازای n=1 , m=1 $\Longrightarrow \quad \rho_{11}(t) = \frac{(1-t^2)}{2} * (t^2-1)'' = \frac{(1-t^2)}{2} * 2 = 1 - t^2$

با به دست آوردن توابع (R,L,T) کافیست آنها را در هم ضرب کنیم تا به تابع هدف یعنی تابع V دست یابیم لذ $V(r, \lambda.\theta)$ برابر است با :

$$V(r, \theta.\lambda) = R_r * L_\lambda * T_\theta$$

$R_1 r * L_1 \lambda * T_\theta = r^n \sin(m\lambda)\, \rho_{nm}(cos\theta)$ 1

$R_2 r * L_1 \lambda * T_\theta = \frac{1}{r^{n+1}} \sin(m\lambda)\, \rho_{nm}(cos\theta)$ 2

$R_1 r * L_2 \lambda * T_\theta = r^n \cos(m\lambda)\, \rho_{nm}(cos\theta)$ 3

$R_2 r * L_2 \lambda * T_\theta = \frac{1}{r^{n+1}} \cos(m\lambda)\, \rho_{nm}(cos\theta)$ 4

R1,R2 و L1,L2 را از روابط بدست آمده جایگزین می کنیم.

پس چهار تابع جواب معادله لاپلاس هستند. یکی از ویژگیهای توابع هارمونیک این است که ترکیب خطی آنها نیز می تواند جواب معادله باشد.بجای چهار معادله معرفی شده دو ترکیب خطی زیر را معرفی می کنیم که در آنها a_{nm} و b_{nm} ضرایب ترکیب خطی هستند.

$$V(r, \lambda.\theta) = a_{nm} r^n \cos m\lambda\, \rho nm(cos\theta) + b_{nm} r^n\, sinm\lambda\, \rho nm(cos\theta)$$

ترکیب معادله اول و سوم $\Longrightarrow r^n(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm} sinm\lambda)\rho_{nm}(\cos\theta)$

ترکیب معادله دوم و چهارم $\Longrightarrow r^{-(n+1)}(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm} sinm\lambda)\rho_{nm}(\cos\theta)$

هارمونیک های کروی سطحی : به توابع زیر هارمونیک های کروی سطحی گفته می شود

$$C_{nm} = \cos m\lambda\, \rho_{nm}(cos\theta)$$

$$S_{nm} = \sin m\lambda\, \rho_{nm}(cos\theta)$$

پس می توان توابع زیر را به صورت هارمونیک های کروی سطحی بازنویسی کرد.

$$r^n b_{nm} S_{nm} + a_{nm} C_{nm}$$

$$r^{-(n+1)}(a_{nm} C_{nm} + b_{nm} S_{nm})$$

$$S_{nm} = \sin m\lambda\, \rho_{nm}\, (cos\theta)$$

$$C_{nm} = cosm\lambda\, \rho_{nm}(cos\theta)$$

دو معادله صفحه قبل بصورت صحیح بشکل زیر می باشد

$$V(r,\lambda.\theta) = \sum_{n=۰}^{\bowtie} r^n \sum_{m=۰}^{n} a_{nm}C_{nm} + b_{nm}S_{nm} \qquad \text{I}$$

$$V(r,\lambda.\theta) = \sum_{n=۰}^{\bowtie} r^{-(n+۱)} \sum_{m=۰}^{n} a_{nm}C_{nm} + b_{nm}S_{nm} \qquad \text{II}$$

به ازای n و m از صفر تا بینهایت می توان بینهایت جمله برای توابع V نوشت که در اصل توابع V مجموع تمامی این بینهایت جمله است. پس باید شکل نهایی توابع ۱و۲ بدین صورت باز نویسی شود.

فرمول های فوق را به صورت زیر هم می توان نوشت:

$$\sum_{n=۰}^{\bowtie} \sum_{m=۰}^{n} \frac{۱}{r^{n+۱}}(a_{nm}\, C_{nm} + b_{nm}\, S_{nm})$$

البته واضح است در صورت حل عددی این توابع و دستیابی به مقدار عددی تابع جاذبه نمی توانیم جملات را تا بینهایت ادامه دهیم. بنابراین با پذیرش تقریبی مقدار تابع جملات را در جایی قطع کرده، یعنی n را تا مقدار عددی خاصی ادامه دهیم و از باقی جملات صرفنظر می کنیم.

میدان جاذبه در داخل و خارج کره زمین: از بین دو تابع شماره ۱و ۲ تابع ۱ تابعی است که در داخل یک کره هارمونیک است در حالیکه تابع ۲ در خارج از یک کره هارمونیک می باشد. در صورتیکه ما مرز هارمونیک یا سطح هارمونیکی خود را یک کره به شعاع واحد در نظر بگیریم جواب هر دو تابع روی کره یکسان خواهد بود.

r=1

$V(r,\lambda.\theta)$

$$\sum_{n=۰}^{\bowtie} \sum_{m=۰}^{n}(a_{nm}\, C_{nm} + b_{nm}\, s_{nm})$$

$$\begin{cases} r = ۱ \\ V(r,\lambda.\theta) = ۰ \\ \sum_{n=۰}^{\bowtie} \sum_{m=۰}^{n}(a_{nm}\, C_{nm} + b_{nm}\, s_{nm}) \end{cases}$$

$$V(r,\lambda.\theta) \sum_{n=۰}^{\bowtie} r^{-(n+۱)} \sum_{m=۰}^{\bowtie} a_{nm}C_{nm} + b_{nm}S_{nm}$$

برای اینکه این مسئله برای هر کره ای به شعاع دلخواه مثلا a برقرار باشد یعنی برای هر کره دلخواهی که مرز هارمونیکی ما را تشکیل می دهد مقادیر دو تابع ۱و ۲ روی مرز کره یکسان باشد هر دو تابع را در یک ضریب مقیاس دلخواه به اندازه $a^{-۱}$ ضرب می کنیم.

در دو معادله بالا به جای r ، $\frac{r}{a}$ را جایگزین می کنیم و سپس همانند زیر می شود.

$$V(r,\lambda.\theta) = \sum_{n=۰}^{\bowtie} (\frac{r}{a})^n \sum_{m=۰}^{n} a_{nm}C_{nm} + b_{nm}S_{nm} \qquad \text{I}$$

$$V(r,\lambda.\theta) = \sum_{n=۰}^{\bowtie} (\frac{r}{a})^{-(n+۱)} \sum_{m=۰}^{n} a_{nm}C_{nm} + b_{nm}S_{nm} \qquad \text{II}$$

بنابراین برای سطح هارمونیک دلخواه به شعاع a باز هم هر دو تابع مقدار یکسانی خواهند داشت. در کاربرد خاص این توابع در مدلسازی میدان جاذبه زمین ما با حالت دوم سرو کار خواهیم داشت، چرا که میدان جاذبه در خارج از کره زمین برای ما اهمیت دارد بنابراین از این به بعد با این تابع کار می کنیم.

$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{r})^{(n+1)} \sum_{m=0}^{n} a_{nm}C_{nm} + b_{nm}S_{nm}$

حل مسائل مقدار مرزی: پس از حل معادله لاپلاس و دستیابی به تابع V که تشکیل شده از ضرایب و توابع پایه هستند اکنون می توان بینهایت جواب معادله لاپلاس را نوشت. در اینصورت که بازای بینهایت a_{nm} و b_{nm} که در توابع پایه یعنی C_{nm} و S_{nm} ضرب می شوند بینهایت تابع V نوشت. همه این بینهایت تابع خاصیت هارمونیکی داشته، یعنی در بخشی از فضا هارمونیکی اند و جواب معادله لاپلاس و در بخش دیگری از فضا هارمونیکی نیستند. مرز جدا کننده این دو فضا را مرز هارمونیکی می نامیم. اصل دیریخله تضمین می دهد که از بینهایت تابع فقط یک تابع منحصر بفرد وجود دارد که روی یک مرز هارمونیکی خاص در مقادیر مرزی معلومی صدق می کند. بنابراین اگر ما یک مرز معلوم و مقادیر معلومی روی این مرز داشته باشیم فقط یک تابع وجود خواهد داشت که این مقادیر در آن صدق می کند. پس در کاربرد تعیین میدان جاذبه کافیست مرز هارمونیکی جاذبه را مشخص کرده و مقادیری را روی این مرز معلوم می کنیم. از بین بینهایت تابع که جواب معادله لاپلاس هستند فقط یک تابع وجود دارد که این مقادیر در آنها صدق می کند. و این تابع همان تابع جاذبه خواهد بود. برای کنترل و دستیابی به تابعی که در مقادیر مرزی صدق می کند باید یک مسئله مقدار مرزی حل کنیم.

انواع مسائل مقدار مرزی

۱- **مسئله مقدار مرزی نوع اول:** در تابع V

$$V(r, \lambda . \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{r})^{(n+1)} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm}C_{nm} + b_{nm}S_{nm})$$

دو تابع C_{nm} و S_{nm} دو تابع بالغ هستند. مشابه با بردار های تابع i و j در فضای هندسی ویژگی های دیگری که دو تابع i و j داشتند علاوه بر عمود بودن یکه بودن هم بود. در اینجا نیز برای راحتی محاسبات بهتر است که توابع پایه علاوه بر ویژگی مقابل یکدیگر باشند. برای چنین کاری کافیست دو تابع C_{nm} و S_{nm} را به نرم آنها تقسیم کنیم. بنا بر این خواهیم داشت:

$$\tilde{C}_{nm} = \frac{C_{nm}}{\|C_{nm}\|} \qquad \tilde{S}_{nm} = \frac{S_{nm}}{\|S_{nm}\|}$$

در اینصورت ما در یک فضای ارتو نرمال کار می کنیم. برای باز نویسی تابع V در این فضا باید ضرایب نیز متناسب با توابع پایه تغییر کند.

$$V(r, \lambda . \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{r})^{(n+1)} \sum_{m=0}^{n} (\tilde{a}_{nm}\tilde{C}_{nm} + \tilde{b}_{nm}\tilde{S}_{nm})$$

از این پس می خواهیم با حل مسائل مقدار مرزی دو مقدار $\tilde{a}$ (آتیلا) و $\tilde{b}$ (بیتیلا) را بدست می آوریم. در مسئله مقدار مرزی نوع اول، مرز s و مقادیر خود تابع روی مرز معلوم هستند.

$$\begin{cases} \qquad\qquad S \\ h_{(\theta . \lambda)} = r_{(r . \theta . \lambda)} \quad r = a \end{cases}$$

مرز معلوم S کروه ای به شعاع a

$$\Sigma (\frac{a}{r})^{(n+1)} \Sigma (a_{nm}c_{nm} + b_{nm}S_{nm})$$

$h_{(\theta.\lambda)} = \sum_{n=.}^{\bowtie} \sum_{m=.}^{n} a_{nm}(h)c_{nm} + b_{nm}(h)S_{nm}$

$\sum_{n=.}^{\bowtie} \sum_{m=.}^{n} a_{nm}(v)c_{nm} + b_{nm}(v)S_{nm}$

S_{kl}(بردار تابع پایه) ضرب داخل تساوی

C_{kl} (بردار تابع پایه) ضرب داخل تساوی

$$\iint h_{(\theta.\lambda)} * C_{kl} = \iint \sum\sum a_{nm}(V)c_{nm} * C_{kl} + b_{nm}(V)S_{nm} * C_{kl}$$

$$\sum\sum \iint a_{nm}(V)c_{nm} * C_{kl} + \iint b_{nm}(V)S_{nm} * C_{kl} = a_{nm}(V)$$

$$\begin{cases} ١ & IF \quad n = k\,.m = l \\ . & \quad n \neq k\,.m \neq l \end{cases}$$

توجه: در همه جا باید از مقادیر $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ و $\tilde{C}$ و $\tilde{S}$ استفاده شود.

$$a_{kl}(V) = \iint h_{(\theta.\lambda)} * C_{kl}$$

$$a_{nm}(V) = \iint h_{(\theta.\lambda)} * C_{nm}$$

$\sum_{n=.}^{\bowtie} \sum_{m=.}^{n} a_{nm}(v)c_{nm} + b_{nm}(v)S_{nm}$ ضرب داخلی تساوی در S_{kl}

$$\iint h_{(\theta.\lambda)} * S_{kl} = \iint \sum\sum a_{nm}(V)c_{nm} * S_{kl} + b_{nm}(V)S_{nm} * S_{kl}$$

$$\sum\sum \iint a_{nm}(V)c_{nm} * C_{kl} + \iint b_{nm}(V)S_{nm} * C_{kl} = b_{nm}(V)$$

$$\begin{cases} ١ & IF \quad n = k\,.m = l \\ . & \quad n \neq k\,.m \neq l \end{cases} \Longrightarrow = b_{nm}(V)$$

مسئله مقدار مرزی نوع دوم: در مسئله مقدار مرزی نوع دوم روی مرز معلوم S که کره ای به شعاع دلخواه a می باشد مقادیر مشتق تابع V معلوم است که آنرا $h_١$ می نامیم. هدف ما از حل این مسئله دستیابی به مقادیر خود تابع V در تمام فضا می باشد. در حالیکه روی مرز S مقادیر $h_١$ یعنی مشتق V را داریم، پس $h_١$ را می توان به دو صورت نوشت. یکبار بر حسب ضرایب $\tilde{a}_{nm(h1)}$ و $\tilde{b}_{nm(h1)}$ نوشت و بار دیگر با مشتق گیری از تابع V که در نهایت این دو رابطه با یکدیگر برابر خواهند بود و می توانیم ضرایب مجهول $\tilde{a}_{nm(V)}$ و $\tilde{b}_{nm(V)}$ بر حسب ضرایب معلوم $\tilde{a}_{nm(h1)}$ و $\tilde{b}_{nm(h1)}$ بدست آوریم.

$$\begin{cases} S \\ h_{(\theta.\lambda)} = \frac{\partial V}{\partial r}|r = a \end{cases}$$

مرز معلوم S کره ای به شعاع a

$$h_{(\theta.\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \tilde{a}_{nm}(h_1)\tilde{c}_{nm} + \tilde{b}_{nm}(h_1)\tilde{S}_{nm} \qquad \mathrm{I}$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (\tfrac{a}{r})^{n+1} * \tilde{a}_{nm}(V)\tilde{c}_{nm} + \tilde{b}_{nm}(V)\tilde{S}_{nm}$$

$$h_1 = \frac{\partial V}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} = -(n+1)(\frac{a}{r^2})(\frac{a}{r})^n * [\![\tilde{a}_{nm}(V)\tilde{c}_{nm} + \tilde{b}_{nm}(V)\tilde{S}_{nm0}]\!]$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{\partial V}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} = -(n+1)(\frac{a}{r^2})(\frac{a}{r})^n \dashrightarrow r = a$$

$$\dashrightarrow r = a \Rightarrow \sum\sum \left(\tfrac{n+1}{a}\right) * (\tilde{a}_{nm}(V)\tilde{c}_{nm} + \tilde{b}_{nm}(V)\tilde{S}_{nm} \qquad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{II} \Longrightarrow \sum\sum \tilde{a}_{nm}(h_1)\tilde{c} + \tilde{b}(h_1)\tilde{S}_{nm} = \sum\sum - \left(\frac{n+1}{a}\right) * (\tilde{a}_{nm}(V)\tilde{c}_{nm} + b_{nm}\tilde{s})$$

$$\boldsymbol{\tilde{a}_{(h1)}} = -\left(\frac{n+1}{a}\right)\boldsymbol{\tilde{a}}(V) \Longrightarrow \boldsymbol{\tilde{a}_{(v)}} = -\left(\frac{-a}{n+1}\right)\boldsymbol{\tilde{a}}(h_1)$$

$$\tilde{b}(h1) = -\left(\frac{n+1}{a}\right)\tilde{b}(V) \Longrightarrow \tilde{b}_{(v)} = -\left(\frac{-a}{n+1}\right)\tilde{b}(h_1)$$

مسئله های مرزی نوع سوم:

$$\begin{cases} S \\ h_{(\theta.\lambda)} = C_1 V|r = a + C_2 \frac{\partial V}{\partial r}|r = a \end{cases}$$

مرز معلوم S کره ای به شعاع a

$$C_1\left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (\tilde{a}_1 V)\tilde{c} + \tilde{b}(V)\tilde{s}\right) + C_2(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} - \left(\frac{n+1}{a}\right)(\tilde{a}_1 V)\tilde{c} + \tilde{b}(V)\tilde{s} \xrightarrow{r=a} \mathrm{I}$$

$$h_2 = C_1\left(\sum\sum \tilde{a}(V)\tilde{c} + \tilde{b}(V)\tilde{s}\right) + C_2\left(\sum\sum \quad -\left(\frac{n+1}{a}\right)(\tilde{a}V)\tilde{c} + \tilde{b}(V)\tilde{s}\right)$$

$$h_2 = \sum\sum\left[C_1\left(\tilde{a}(V)\tilde{c} + \tilde{b}(V)\tilde{s}\right) + C_2(-\left(\frac{n+1}{a}\right)(\tilde{a}(V)\tilde{c} + \tilde{b}(V)\tilde{s}\right]$$

$$= \sum\sum\left[C_1 - \left(\frac{C_2(n+1)}{a}\right) * (\tilde{a}(V)\tilde{c} + \tilde{b}(V)\tilde{s}\right]$$

$$\Longrightarrow \tilde{a}(h_1) = (C_1 - \tfrac{C_2(n+1)}{a})\ (\tilde{a}(V) \quad , \quad \tilde{b}(h_1) = (C_1 - \tfrac{C_2(n+1)}{a})\ (\tilde{b}(V))$$

$$h_{2(\theta.\lambda)} = \sum\sum \tilde{a}(h_2)\tilde{c} + \tilde{b}(h_2)\tilde{s} \quad \mathrm{II}$$

I = II

$$\tilde{a}(V)=\frac{\tilde{a}(h_{١})}{C_{١}-C_{٢}\left(\frac{n+١}{a}\right)}$$

$$\tilde{b}(V)=\frac{\tilde{b}(h_{١})}{C_{١}-C_{٢}\left(\frac{n+١}{a}\right)}$$

بخش دوم

میدان نیروی ثقل:

فیزیکال ژئودزی به معرفی و محاسبه نیروی ثقل زمین می پردازد. نیروی ثقل (نیروی سنگینی) به مجموعه دو نیروی جاذبه و گریز از مرکز گفته می شود.

میدان نیروی جاذبه:

طبق قانون نیوتن هر جسمی به جرم M نیرویی به جسم دوم m که در فاصله r نسبت به آن قرار گرفته است را وارد می کند.

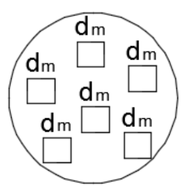
$$\vec{f} = G\frac{M * m}{\|r^{۳}.\|}$$

طبق قانون نیوتن این رابطه فقط برای یک نقطه مادی برقرار است. از طرف دیگر می دانیم که زمین یک نقطه نیست بلکه یک جسم مادی است. برای محاسبه نیروی جاذبه ی زمین که به هر جرم دیگری وارد می شود، جرم دوم را واحد در نظر می گیریم و از این پس از میدان نیروی جاذبه زمین صحبت می کنیم. این بدان معناست که هر جسم دیگری با جرم دلخواه که وارد این میدان شود، تحت تاثیر نیروی جاذبه زمین خواهد بود.

رابطه میدان نیروی جاذبه به نقطه مادی:

$$\overrightarrow{f_g} = \frac{-GM}{r^{۳}} * \vec{r} \qquad (m = ۱)$$

برای محاسبه میدان نیروی جاذبه ی یک جسم مادی آن را به المان های بی نهایت کوچک d_m تقسیم می کنیم. سپس میدان جاذبه را برای این المان می نویسیم:



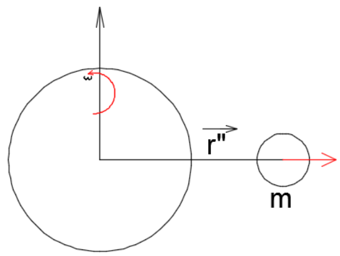
$$d * \overrightarrow{f_g} = \frac{-GM}{r^{۳}} * \vec{r} \qquad \underline{d_m = \delta dv}$$

$$d * \overrightarrow{f_g} = \frac{-GM}{r^{۳}} * \vec{r} \Rightarrow \overrightarrow{f_g} = \iiint \frac{-G\delta dv}{r^{۳}} * \vec{r}$$

میدان نیروی گریز از مرکز:

اگر جسمی با سرعت ω در حال دوران باشد، به هر جسم دیگری که همراه آن دوران کند، یک نیرویی وارد می کند که به آن نیروی گریز از مرکز گفته می شود. همچنین با واحد در نظر گرفتن جرم جسم دوم از میدان نیروی گریز از مرکز صحبت می کنیم

. بنابراین می توان رابطه گریز از مرکز را چنین نوشت که در آن r'' فاصله عمودی بین دو جسم بوده و ω سرعت دورانی آن است.



$$\overrightarrow{f_c} = \omega^2 * m * \overrightarrow{r''} \quad \underline{m=1} \qquad \overrightarrow{f_c} = \omega^2 r''$$

مطابق با حالت قبل با واحد در نظر گرفتن جرم جسم دوم به میدان نیروی گریز از مرکز میرسیم.

پس در نهایت برای میدان نیروی ثقل داریم:

$$\vec{f} = \overrightarrow{f_g} + \overrightarrow{f_c} = \iiint \frac{-G\delta dv}{r^3} * \vec{r} + \omega^2 r''$$

میدان پتانسیل ثقل:

میدان نیروی ثقل یک میدان برداری است، بنابراین ω هر نقطه، ۳ عدد که مقادیر نیروی ثقل در ۳ جهت هستند را نسبت می دهند. کار کردن با چنین میدانی مشکل بوده به این دلیل که علاوه بر مقدار به جهت نیز بستگی دارد. در مقابل میدان هایی وجود دارند که اسکالر هستند و تمامی اطلاعات قابل استخراج از میدان های برداری از این میدان های اسکالر نیز بدست می آید.بنابراین ما می توانیم از میدان های برداری صرف نظر کرده و از میدان اسکالر پتانسیل استفاده کنیم.

اما این جایگزین یک شرط دارد، به این صورت که میدان برداری مورد نظر باید غیر دورانی (کنسرواتیو) باشند. می دانیم که میدان نیروی ثقل یک میدان غیر دورانی است . بنابراین می توانیم آن را با میدان اسکالر جایگزین کنیم که به آن میدان پتانسیل ثقل گفته می شود و در واقع بر آیند دو میدان پتانسیل جاذبه و پتانسیل گریز از مرکز است.

سوال: ثابت کنید میدان جاذبه و میدان نیروی گریز از مرکز غیر دورانی هستند.

میدان پتانسیل جاذبه:

جسمی به جرم M ($M = \delta * V$)

$$V = G\iiint \frac{\delta dv}{r^2} \qquad \text{یا} \qquad V = \frac{GM}{r}$$

میدان پتانسیل گریز از مرکز:

برای جسمی که با سرعت ω دوران می کند، رابطه ی پتانسیل گریز از مرکز برابر است با:

$$W = \frac{۱}{۲} * \omega^{۲} * r''^{۲}$$

میدان پتانسیل ثقل:

در نهایت برای میدان پتانسیل ثقل داریم:

$$u = V + W = G \iiint \frac{\delta}{r} dv + \frac{۱}{۲} * \omega^{۲} * r''^{۲}$$

$$\begin{cases} G \iiint \frac{\delta}{r} dv \\ \overrightarrow{f_g} = \nabla * V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \end{cases}$$

$$\left[-G \iiint \frac{\delta dv}{r^{۳}} x\right]\hat{\imath} + \left[-G \iiint \frac{\delta dv}{r^{۳}} y\right]\hat{\jmath} + \left[-G \iiint \frac{\delta dv}{r^{۳}} z\right]\hat{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial(x.y.z)} = \frac{\partial V}{\partial r} * \frac{\partial r}{\partial(x.y.z)} = (G \iiint \frac{\delta dv}{r})' * \frac{\partial r}{\partial(x.y.z)} = G \iiint \left(\frac{\delta dv}{r}\right)' * \frac{\partial r}{\partial(x.y.z)}$$

$$-G \iiint \frac{\delta dv}{r^{۲}} * \frac{\partial r}{\partial(x.y.z)} = -G \iiint \frac{\delta dv}{r^{۲}} * (\frac{۱}{۲} * z_{x.y.z} * \frac{۱}{r}) = -G \iiint \frac{\delta dv}{r^{۲}} * \frac{x.y.z}{r}$$

میدان نیروی جاذبه⟸

$$\Rightarrow \overrightarrow{f_g} = -G \iiint \frac{\delta dv}{r^{۲}} * \vec{r}$$

بنابراین ثابت شد که گرادیان پتانسیل جاذبه یعنی V برابر است با نیروی جاذبه یعنی $\overrightarrow{f_g}$

یادآوری مشتق:

$$(u^n)' = n * u' * u^{n-۱}$$

$$r = \sqrt{(x - x.)^{۲} + (y - y.)^{۲} + (z - z.)^{۲}}$$

مسئله: ثابت کنید گرادیان پتانسیل گریز از مرکز با نیروی گریز از مرکز برابر است.

ارتباط میدان نیرو و میدان پتانسیل:

با داشتن میدان نیرو یا پتانسیل می توان دیگری را حساب کرد، به این صورت که میدان برداری نیرو مشتق میدان پتانسیل است و با گرادیان گیری از پتانسیل می توان به میدان نیرو رسید و بالعکس، با انتگرال گیری از میدان نیرو می توان میدان پتانسیل را محاسبه کرد. پس برای میدان نیروی جاذبه و پتانسیل جاذبه داریم:

$$\overrightarrow{f_g} = \nabla * V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

$$V = \int \overrightarrow{f_g} * (\vec{r})dr$$

از آنجا که بدست آوردن میدان پتانسیل با انتگرال گیری از میدان نیرو معمولا کار دشواری است. در اکثر مواقع از میدان پتانسیل به محاسبه میدان نیرو پرداخته می شود.

$$\begin{cases} G\iiint \frac{\delta}{r}\, dv \\ \overrightarrow{f_g} = \nabla * V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \end{cases}$$

مسئله۱: ثابت کنید میدان جاذبه و میدان نیروی گریز از مرکز غیر دورانی هستند.

با توجه به دانسیته دو فرض داریم :

فرض اول: دانسیته با زمان تغییر می کند که آن را دانسیته دینامیک می نامند.

فرض دوم: دانسیته با زمان تغییر نمی کند که آن را دانسیته استاتیک می نامند.

میدان برداری: تابعی است که به هر نقطه از فضا یک بردار نسبت می دهد. میدان ثقل یک میدان برداری است که فرض ما این است که این میدان استاتیک است و طول آن نسبت به زمان ثابت است.

$$\vec{F} = m * \vec{a}$$

$$\vec{f} = \overrightarrow{f_g} + \overrightarrow{f_c} = (\underbrace{-G\int \rho(\overrightarrow{r'})\vec{l}\, dv}_{\overrightarrow{a_g}}) * M + (\underbrace{\omega^{۲}\overrightarrow{r''}}_{\overrightarrow{a_c}})M = (\underbrace{\overrightarrow{a_g} + \overrightarrow{a_c}}_{\vec{g}}) * M$$

شتاب ثقل = $(\overrightarrow{a_g} + \overrightarrow{a_c})$

میدان های برداری غیر دورانی (که کار برای انتقال واحد جرم مستقل از مسیر است) می توانند با یک اسکالر نظیر شوند. میدان جاذبه و میدان گریز از مرکز هر دو غیر دورانی هستند.

اگر از میدان برداری غیر دورانی انتگرال بگیریم به اسکالر می رسیم.

$$\vec{f} = \underbrace{\overrightarrow{f_g}}_{V_g} + \underbrace{\overrightarrow{f_c}}_{V_c} \quad . \quad V_g = \int \overrightarrow{f_g} * \overrightarrow{dr} \quad . \quad \nabla V_g = \overrightarrow{f_g} \quad . \quad \nabla V_c = \overrightarrow{f_c}$$

کرل میدان غیر دورانی برابر صفر است.

گرادیان بردار نشان دهنده راستای ماکزیمم تغییرات میدان است.

$$\vec{f} = \overrightarrow{f_g} + \overrightarrow{f_c} = \nabla V_g + \nabla V_c = \nabla \underbrace{(V_g + V_c)}_{V} \Longrightarrow V = V_g + V_c$$

$$\begin{cases} \vec{f} = M\vec{g} = \nabla V = M\nabla W \\ \overrightarrow{f_g} = M\overrightarrow{a_g} = \nabla V_g = M\nabla W_g \\ \overrightarrow{f_c} = M\overrightarrow{a_c} = \nabla V_c = M\nabla W_c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V = MW \\ V_g = MW_g \\ V_c = MW_C \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{f} = \nabla W \\ \overrightarrow{a_g} = \nabla W_g \\ \overrightarrow{a_C} = \nabla W_C \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{a_g} = \overrightarrow{a_g} + \overrightarrow{a_c} \\ W = W_g + W_C \end{cases}$$

مسئله۲: ثابت کنید گرادیان پتانسیل گریز از مرکز با نیروی گریز از مرکز برابر است.

میدان نیروی گریز از مرکز یک میدان پایستار است. $\vec{\nabla} * \vec{a}_{c=}$ بنابراین می توان با حفظ خصوصیات ، میدان اسکالر پتانسیل را با آن جایگزین کرد.

پتانسیل گریز از مرکز از رابطه زیر بدست می آید:

$$V_c = \frac{۱}{۲} * \omega^۲ * r''^۲$$

$$r''^۲ = x^۲ + y^۲$$

برای اثبات موضوع کافی است از رابطه بالا گرادیان بگیریم

$$\vec{\nabla}(V_c) = \frac{۱}{۲} * \omega^۲ \begin{cases} \frac{\partial(r''^۲)}{\partial x} \\ \frac{\partial(r''^۲)}{\partial y} \\ \frac{\partial(r''^۲)}{\partial z} \end{cases} = \frac{۱}{۲} * \omega^۲ \begin{cases} ۲ * x \\ ۲ * y \\ ۰ \end{cases} = \ \omega^۲\overrightarrow{a''} = \overrightarrow{a_c}$$

تعیین پتانسیل جاذبه:

قبلا دیورژانس را به عنوان اپراتوری که شار عبوری سطح بسته ای به حجم $V0$ که آن را به سمت صفر میل می دهیم اندازه گیری می کنند معرفی کردیم. در واقع دیورژانس بیانگر شار عبوری از یک نقطه می باشد.

$$div\,\overrightarrow{f_g} = lim\frac{\oiint \overrightarrow{f_g}*\overrightarrow{ds}}{V.} = lim\frac{\oiint f_g*ds*cos\theta}{V.} = lim\frac{\oiint f_g*ds}{V.} = \frac{-\frac{GM}{r^{\text{٢}}}\oiint ds}{V.} = \frac{lim\frac{-GM}{r^{\text{٢}}}}{V.}\text{٤}*\pi*r^{\text{٢}} =$$

$$lim\frac{-\text{٤}*\pi*GM}{V.} \qquad \underbrace{M}_{} = \sigma V. \qquad lim\frac{-\text{٤}*\pi*G\sigma V.}{V.} = -\text{٤}*\pi*G*\sigma$$

$$\Longrightarrow div\,\overrightarrow{f_g} = -\text{٤}*\pi*G*\sigma$$ دیورژانس نیروی جاذبه

مساحت کره=$\text{٤}*\pi*r^{\text{٢}}$, چگالی=ρ, نیروی جاذبه=$\overrightarrow{f_g}$, بردار عمود بر سطح=$\overrightarrow{ds}$,

$$div\,\overrightarrow{f_g} = div(\overrightarrow{\nabla_v}) = \vec{\nabla}*(\overrightarrow{\nabla_v}) = -\text{٤}*\pi*G*\sigma$$

$$\nabla^{\text{٢}}V = -K\pi G\sigma = \begin{cases} -\text{٤}*\pi*G*\sigma \\ -\text{٢}*\pi*G*\sigma \\ \text{۰} \end{cases} \begin{cases} K = \text{٤} \\ K = \text{٢} \\ K = \text{۰} \end{cases}$$

برای نقطه ای خارج از زمین $K=0$, برای نقطه ای روی زمین $K=2$, برای نقطه ای داخل زمین$K=4$

تذکر: مقدار ρ داخل کره کامل می باشد، و برای روی کره نصف می شود و برای خارج از کره صفر است.

لاپلاسین پتانسیل جاذبه در خارج از کره زمین برابر صفر محاسبه شد.$\nabla^{\text{٢}}V = \text{۰}$

قبلا گفته شد که اندازه گیری و مشاهدات ما عملا در خارج از کره زمین اتفاق می افتد. پس تحلیل و بررسی این قسمت از کار برای ما مهم است. وقتی لاپلاسین یک تابع برابر صفر باشد با معادله لاپلاسین مواجه خواهیم بود. طی جلسات قبل این معادله حل شد و پتانسیل جاذبه بدست آمد.

$V_{(r.\theta.\lambda)}\sum_{m=\text{۰}}^{\bowtie}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+\text{١}}\sum_{m=\text{۰}}^{n}\left(a_{nm}C_{nm}+b_{nm}S_{nm}\right)$ یا $V_{(r.\theta.\lambda)}\sum_{m=\text{۰}}^{\bowtie}\left(\frac{r}{a}\right)^{-(n+\text{١})}\sum_{m=\text{۰}}^{n}\left(a_{nm}cosm\lambda+b_{nm}sinm\lambda\right)\rho_{nmcos\theta}$

هارمونیک های کروی سطحی: تابع پتانسیل را خارج از کره زمین می توانیم بر حسب هارمونیک های سطحی بنویسیم.

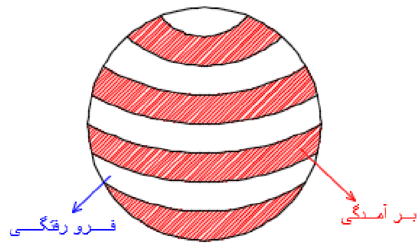
$$C_{nm} = cosm\lambda\rho_{nm}cos\theta$$

$$S_{nm} = sinm\lambda\rho_{nm}cos\theta$$

$$V_{(r.\theta.\lambda)}\sum_{m=\text{۰}}^{\bowtie}\left(\frac{r}{a}\right)^{-(n+\text{١})}\sum_{m=\text{۰}}^{n}\left(a_{nm}C_{nm}+b_{nm}S_{nm}\right)$$

سه حالت خاص برای هارمونیک های کروی سطحی معرفی می شود.

حالت اول: حالتی که $m=0$ باشد.

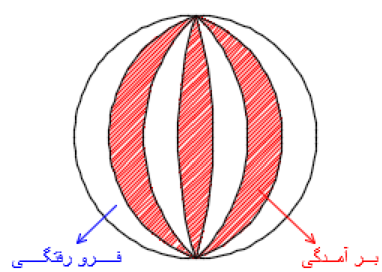


$$C_{n0} = cos0\lambda\rho_{n0}cos\theta \Longrightarrow \quad cos0\lambda = 1 \quad \Longrightarrow C_{n0} = \rho_{n0}cos\theta$$

$$S_{n0} = sin0\lambda\rho_{n0}cos\theta \Longrightarrow S_{n0} = 0$$

تذکر:با صفر شدن m تابع دیگر به λ وابسته نبوده و تغییرات فقط در راستای نصف النهاری معلوم می شوند. تابع $\rho_{n0}cos\theta$ با داشتن n ریشه روی سطح کره، $n-1$ ناحیه ایجاد می کند که بصورت قراردادی به نواحی برآمده و فرو رفته معروف هستند، هر یک از این نواحی را یک زون نامیده و بنابراین به هارمونیک کروی که $m=0$ باشد هارمونیک های زونال گفته می شود.

حالت دوم: حالتی که $m=n$ باشد.

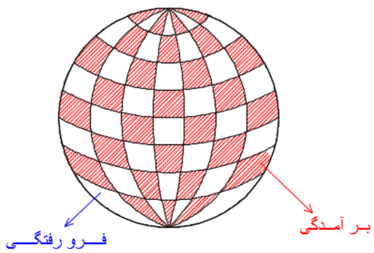


$$C_{nn} = cosn\lambda\rho_{nn}cos\theta$$

$$S_{nn} = sinn\lambda\rho_{nn}cos\theta$$

در حالتی که $m=n$ باشد برای ρ_{nn} ریشه فقط در $\theta = 0$ اتفاق می افتد و بنابراین این بخش از هارمونیک های ایجاد ناحیه نخواهد کرد در حالتی که $sinn\lambda$ و $cosn\lambda$ سطح کره را به قاچ های مثبت و منفی و یا همان فرو رفته و برجسته تقسیم بندی می کند. این قاچ ها را سکتور نامیده و بنابراین به هارمونیک کروی که در آن $m=n$ باشد هارمونیک سکتوریال گفته می شود.

حالت سوم $n \neq m \neq ۰$



$$C_{nm} = cosm\lambda\rho_{nm}cos\theta$$

$$S_{nm} = sinm\lambda\rho_{nm}cos\theta$$

در این حالت برای ρ_{nm} ، $(n\text{-}m\text{+}2)$ ریشه و هر یک از $cosm\lambda$ و $sinm\lambda$ ، m ریشه خواهند داشت، پس در نهایت در این سری از هارمونیک ها $(n-m+۲) m * ۲$ ریشه و $(n-m+۱) m * ۲$ ناحیه فرورفتگی و برآمدگی داریم، به این هارمونیک ها که در آنهاهارمونیک های تسرال گفته می شود.